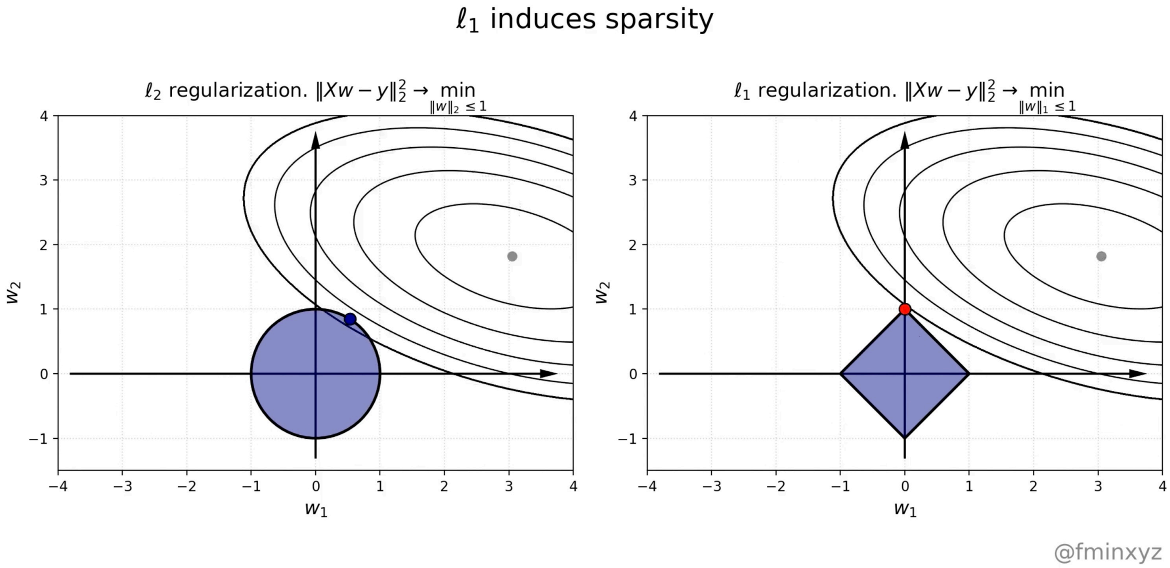
Субградиент и субдифференциал

Даниил Меркулов

Методы оптимизации. МФТИ

Негладкие задачи

Задача наименьших квадратов с ℓ_1- регуляризацией



Нормы не являются гладкими

$$
\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),
$$

Рассмотрим классическую выпуклую задачу оптимизации. Мы предполагаем, что $f(x)$ является выпуклой функцией, но теперь мы не требуем гладкости.

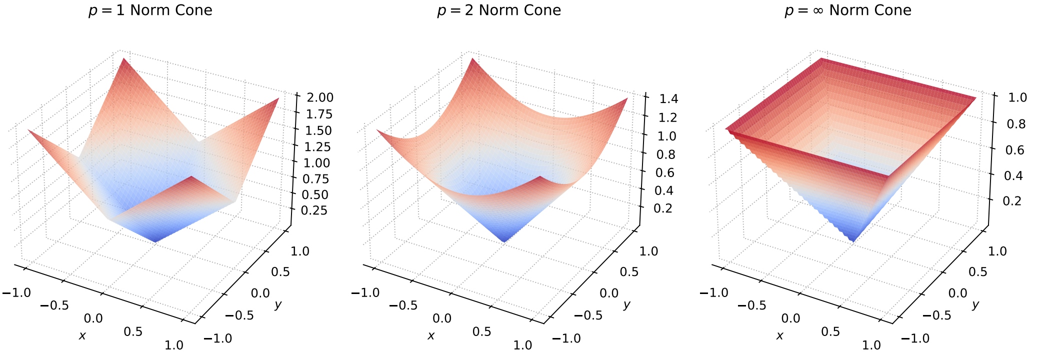


Рис. 1: Нормы конусов для разных p — нормы не являются гладкими

Пример Вульфа

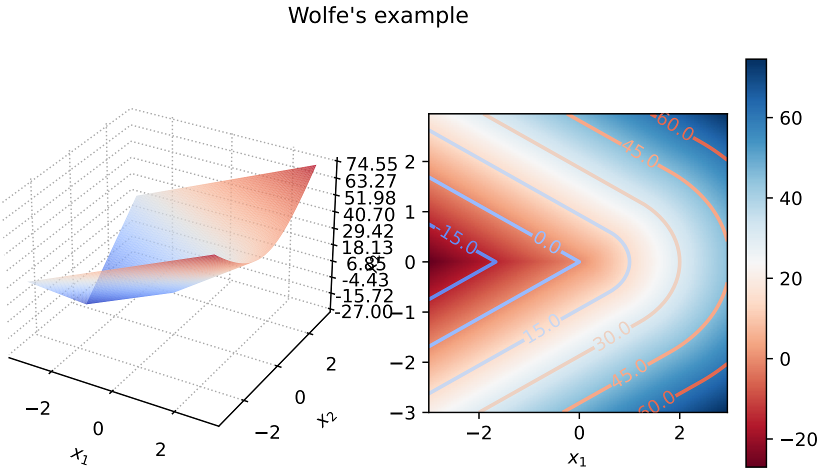


Рис. 2: Пример Вульфа. Открыть в Colab

Вычисление субградиента

Линейная нижняя оценка выпуклых функций

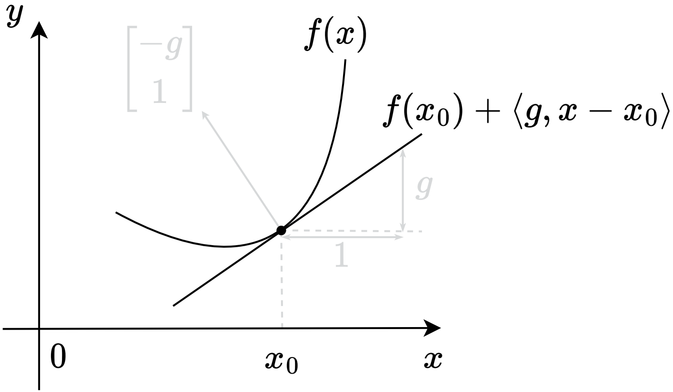


Рис. 3: Линейная аппроксимация Тейлора служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Важное свойство непрерывной выпуклой функции $f(x)$ заключается в том, что для любой выбранной точки x_0 для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Линейная нижняя оценка выпуклых функций

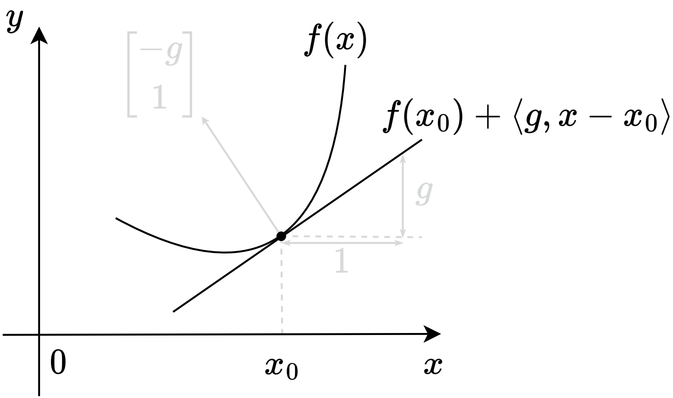


Рис. 3: Линейная аппроксимация Тейлора служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Важное свойство непрерывной выпуклой функции $f(x)$ заключается в том, что для любой выбранной точки x_0 для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора g, т.е. касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.

Линейная нижняя оценка выпуклых функций

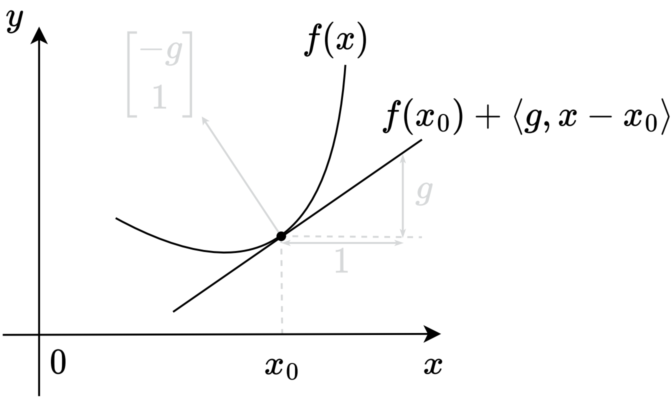


Рис. 3: Линейная аппроксимация Тейлора служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Важное свойство непрерывной выпуклой функции $f(x)$ заключается в том, что для любой выбранной точки x_0 для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$
f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle
$$

для некоторого вектора g, т.е. касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Линейная нижняя оценка выпуклых функций

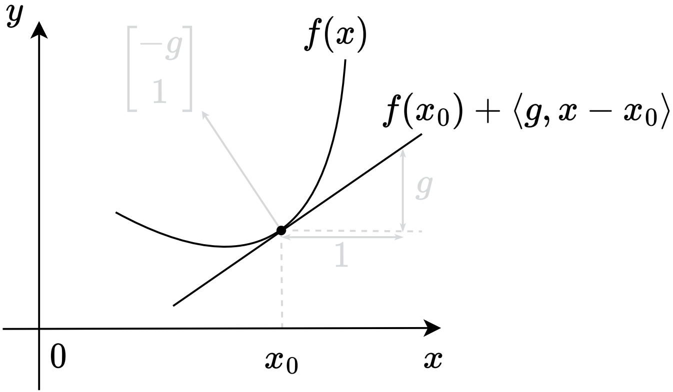


Рис. 3: Линейная аппроксимация Тейлора служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Важное свойство непрерывной выпуклой функции $f(x)$ заключается в том, что для любой выбранной точки x_0 для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$
f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle
$$

для некоторого вектора g, т.е. касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Линейная нижняя оценка выпуклых функций

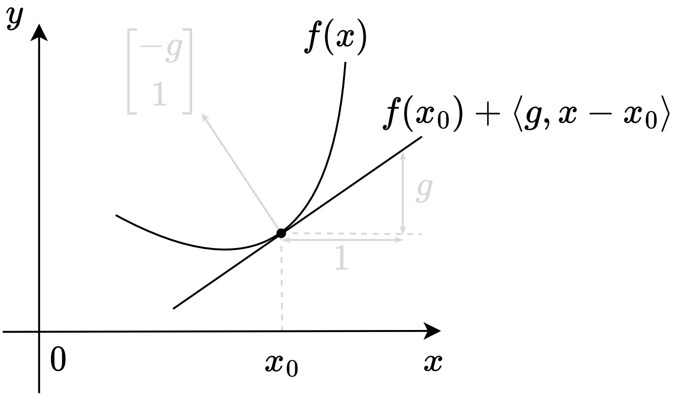


Рис. 3: Линейная аппроксимация Тейлора служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Важное свойство непрерывной выпуклой функции $f(x)$ заключается в том, что для любой выбранной точки x_0 для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора g, т.е. касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Мы не хотим потерять такое удобное свойство.

Субградиент и субдифференциал

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \to \mathbb{R}$ в точке x_0, если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Субградиент и субдифференциал

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \to \mathbb{R}$ в точке x_0, если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Множество всех субградиентов функции $f(x)$ в точке x_0 называется **субдифференциалом** функции f в точке x_0 и обозначается $\partial f(x_0)$.

Субградиент и субдифференциал

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \to \mathbb{R}$ в точке x_0, если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Множество всех субградиентов функции $f(x)$ в точке x_0 называется **субдифференциалом** функции f в точке x_0 и обозначается $\partial f(x_0)$.

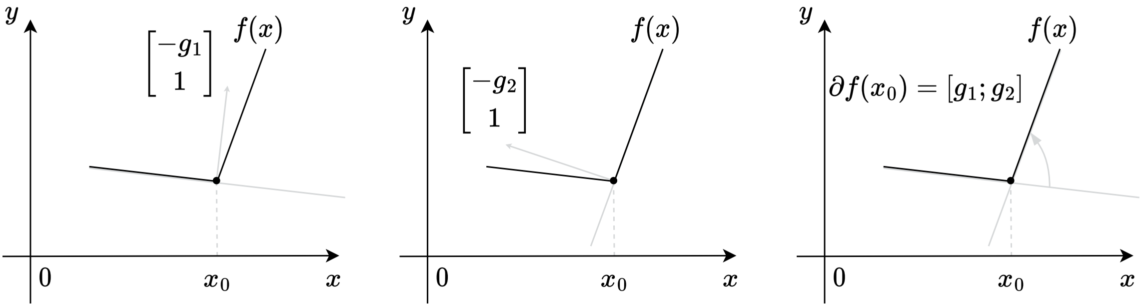


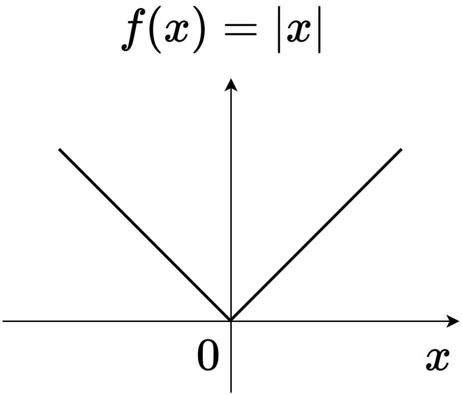
Рис. 4: Субдифференциал — это множество всех возможных субградиентов

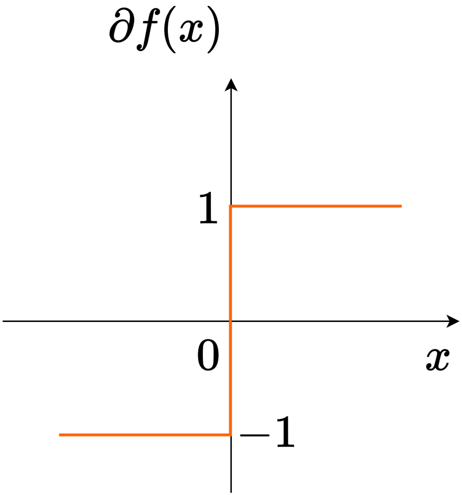
Субградиент и субдифференциал

Найдите $\partial f(x)$, если $f(x) = |x|$

Субградиент и субдифференциал

Найдите $\partial f(x)$, если $f(x) = |x|$





Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S.

Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0, то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$ либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S.

Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0, то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$ либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Доказательство

1. Пусть $s \in \partial f(x_0)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$ отличного от $\nabla f(x_0)$. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор. Поскольку x_0 является внутренней точкой множества S, существует $\delta > 0$ такое, что $x_0 + tv \in S$ для всех $0 < t < \delta$. По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v\rangle$$

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S.

Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0, то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$ либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Доказательство

1. Пусть $s \in \partial f(x_0)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$ отличного от $\nabla f(x_0)$. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор. Поскольку x_0 является внутренней точкой множества S, существует $\delta > 0$ такое, что $x_0 + tv \in S$ для всех $0 < t < \delta$. По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v \rangle$$

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S.

Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0, то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$ либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Доказательство

1. Пусть $s \in \partial f(x_0)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$ отличного от $\nabla f(x_0)$. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор. Поскольку x_0 является внутренней точкой множества S, существует $\delta > 0$ такое, что $x_0 + tv \in S$ для всех $0 < t < \delta$. По определению субградиента:

$$
f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v\rangle
$$

что влечёт:

$$
\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v\rangle
$$

для всех $0 < t < \delta$. Переходя к пределу при $t \to 0$ и используя определение градиента, получаем:

$$
\langle \nabla f(x_0), v\rangle = \lim_{t \to 0; 0 < t < \delta} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v\rangle
$$

Свойства субдифференциала

2. Отсюда $\langle s - \nabla f(x_0), v \rangle \geq 0$. В силу произвольности v можно выбрать

$$v = -\frac{s - \nabla f(x_0)}{\|s - \nabla f(x_0)\|},$$

которое приводит к $s = \nabla f(x_0)$.

Свойства субдифференциала

2. Отсюда $\langle s - \nabla f(x_0), v\rangle \geq 0$. В силу произвольности v можно выбрать

$$
v = -\frac{s - \nabla f(x_0)}{\|s - \nabla f(x_0)\|},
$$

   которое приводит к $s = \nabla f(x_0)$.
3. Более того, если функция f выпукла, то согласно дифференциальному условию выпуклости $f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle$ для всех $x \in S$. Но по определению это означает, что $\nabla f(x_0) \in \partial f(x_0)$.

Субдифференцируемость и выпуклость

Question

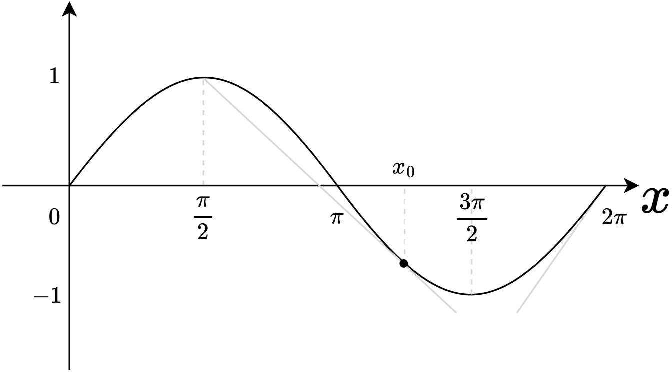
Верно ли, что если функция имеет субдифференциал в некоторой точке, то функция выпукла?

Субдифференцируемость и выпуклость

Question

Верно ли, что если функция имеет субдифференциал в некоторой точке, то функция выпукла?

Найдите $\partial f(x)$, если $f(x) = \sin x, x \in [\pi/2; 2\pi]$



Субдифференцируемость и выпуклость

Question

Верно ли, что если функция выпукла, то она имеет субградиент в любой точке?

Субдифференцируемость и выпуклость

Question

Верно ли, что если функция выпукла, то она имеет субградиент в любой точке?

Выпуклость следует из субдифференцируемости в любой точке. Естественный вопрос заключается в том, верно ли обратное: является ли всякая выпуклая функция субдифференцируемой? Оказывается, в общем случае ответ на этот вопрос отрицателен.

Пусть $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ определена как $f(x) := -\sqrt{x}$. Тогда, $\partial f(0) = \emptyset$.

Предположим, что $s \in \partial f(0)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}$. Тогда, по определению, мы должны иметь $sx \leq -\sqrt{x}$ для всех $x \geq 0$. Из этого мы можем вывести $s \leq -\sqrt{1}$ для всех $x > 0$. Переходя к пределу при x стремящемся к 0 справа, мы получаем $s \leq -\infty$, что невозможно.

Вычисление субдифференциалов

Теорема Моро — Роккафеллара (субдифференциал линейной комбинации)

Пусть $f_i(x)$ — выпуклые функции на выпуклых множествах $S_i,\ i = \overline{1,n}$. Тогда если $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathbf{ri}(S_i) \neq \emptyset$, то функция $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i(x), \quad a_i > 0$ имеет субдифференциал $\partial_S f(x)$ на множестве $S = \bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i$ и

$$
\partial_S f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_{S_i} f_i(x).
$$

Вычисление субдифференциалов

Теорема Моро — Роккафеллара (субдифференциал линейной комбинации)

Пусть $f_i(x)$ — выпуклые функции на выпуклых множествах S_i, $i = \overline{1, n}$. Тогда если $\bigcap\limits_{i=1}^n \mathbf{ri}(S_i) \neq \emptyset$, то функция $f(x) = \sum\limits_{i=1}^n a_i f_i(x)$, $a_i > 0$ имеет субдифференциал $\partial_S f(x)$ на множестве $S = \bigcap\limits_{i=1}^n S_i$ и

$$
\partial_S f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{S_i} f_i(x).
$$

Теорема Дубовицкого — Милютина (субдифференциал поточечного максимума)

Пусть $f_i(x)$ — выпуклые функции на открытом выпуклом множестве $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$, и поточечный максимум определяется как $f(x) = \max\limits_i f_i(x)$. Тогда:

$$
\partial_S f(x_0) = \mathbf{conv} \left\{ \bigcup_{i \in I(x_0)} \partial_S f_i(x_0) \right\},
$$

$$
I(x) = \{ i \in [1 : m] : f_i(x) = f(x) \}
$$

Вычисление субдифференциала

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$, для $\alpha \geq 0$

Вычисление субдифференциала

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$, для $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$, f_i — выпуклые функции

Вычисление субдифференциала

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$, для $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$, f_i — выпуклые функции
- $\partial(f(Ax+b))(x) = A^T \partial f(Ax+b)$, f — выпуклая функция

Вычисление субдифференциала

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$, для $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$, f_i — выпуклые функции
- $\partial(f(Ax+b))(x) = A^T \partial f(Ax+b)$, f — выпуклая функция
- $z \in \partial f(x)$ тогда и только тогда, когда $x \in \partial f^*(z)$.

Связь с выпуклой геометрией

Для выпуклого множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$, рассмотрим индикаторную функцию $I_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$I_S(x) = I\{x \in S\} = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in S \\ \infty & \text{if } x \notin S \end{cases}$$

Связь с выпуклой геометрией

Для выпуклого множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$, рассмотрим индикаторную функцию $I_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$I_S(x) = I\{x \in S\} = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in S \\ \infty & \text{if } x \notin S \end{cases}$$

Для $x \in S$, $\partial I_S(x) = \mathcal{N}_S(x)$, **нормальный конус** для S в x:

$$\mathcal{N}_S(x) = \{g \in \mathbb{R}^n : g^T x \geq g^T y \text{ for any } y \in S\}$$

Связь с выпуклой геометрией

Для выпуклого множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$, рассмотрим индикаторную функцию $I_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$I_S(x) = I\{x \in S\} = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in S \\ \infty & \text{if } x \notin S \end{cases}$$

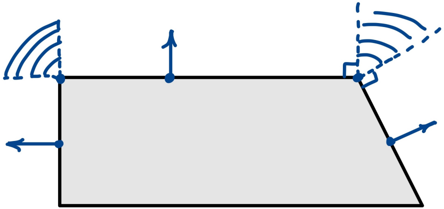
Для $x \in S$, $\partial I_S(x) = \mathcal{N}_S(x)$, **нормальный конус** для S в x:

$$\mathcal{N}_S(x) = \{g \in \mathbb{R}^n : g^T x \geq g^T y \text{ for any } y \in S\}$$

Почему? По определнию субградиента g,

$$I_S(y) \geq I_S(x) + g^T(y - x) \quad \text{for all } y$$

- При $y \notin S$, $I_S(y) = \infty$



Связь с выпуклой геометрией

Для выпуклого множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$, рассмотрим индикаторную функцию $I_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$I_S(x) = I\{x \in S\} = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in S \\ \infty & \text{if } x \notin S \end{cases}$$

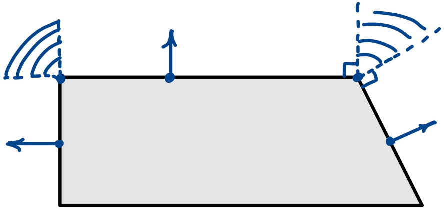
Для $x \in S$, $\partial I_S(x) = \mathcal{N}_S(x)$, **нормальный конус** для S в x:

$$\mathcal{N}_S(x) = \{g \in \mathbb{R}^n : g^T x \geq g^T y \text{ for any } y \in S\}$$

Почему? По определению субградиента g,

$$I_S(y) \geq I_S(x) + g^T(y - x) \quad \text{for all } y$$

- При $y \notin S$, $I_S(y) = \infty$
- При $y \in S$, this means $0 \geq g^T(y - x)$



Условия Оптимальности

Для любой f (выпуклой или нет),

$$f(x^\star) = \min_x f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \in \partial f(x^\star)$$

То есть, $x^\star$ является точкой минимума тогда и только тогда, когда 0 является субградиентом функции f в точке $x^\star$. Это утверждение называется **субградиентное условие оптимальности**

Почему? Легко: если $g = 0$ является субградиентом, это значит что для всех y

$$f(y) \geq f(x^\star) + 0^T(y - x^\star) = f(x^\star)$$

Отметим, что для выпуклой и дифференцируемой функций f верно

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$$

Получение условия оптимальности первого порядка

Попробуем записать общее **условие оптимальности первого порядка**. Вспомним, что решением задачи

$$\min_x f(x) \text{ subject to } x \in S$$

является точка x, для выпуклой и дифференцируемой f, в том и только в том случае, если

$$\nabla f(x)^T(y - x) \geq 0 \quad \text{for all } y \in S$$

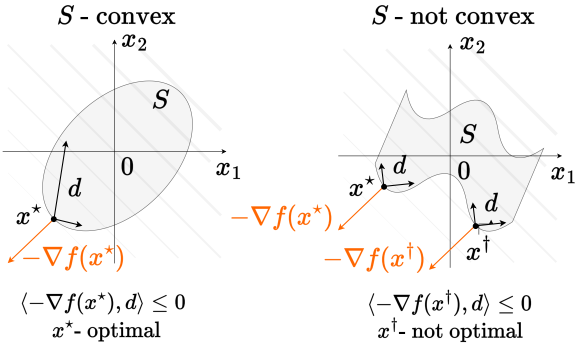
Интуитивно: написанное выше означает, что функция увеличивается по мере движения от точки x. Как это доказать? Во-первых, перепишем задачу в следующем виде:

$$\min_x f(x) + I_S(x)$$

Теперь воспользуемся условием оптимальности в субградиентной форме:

$$0 \in \partial(f(x) + I_S(x))$$

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2}$$



Получение условия оптимальности первого порядка

Заметим, что

$$0 \in \partial(f(x) + I_S(x))$$

Получение условия оптимальности первого порядка

Заметим, что

$$0 \in \partial(f(x) + I_S(x))$$

$$\Leftrightarrow 0 \in \{\nabla f(x)\} + \mathcal{N}_S(x)$$

Получение условия оптимальности первого порядка

Заметим, что

$$
0 \in \partial(f(x) + I_S(x))
$$

$$
\Leftrightarrow 0 \in \{\nabla f(x)\} + \mathcal{N}_S(x)
$$

$$
\Leftrightarrow -\nabla f(x) \in \mathcal{N}_S(x)
$$

Получение условия оптимальности первого порядка

Заметим, что

$$0 \in \partial(f(x) + I_S(x))$$

$$\Leftrightarrow 0 \in \{\nabla f(x)\} + \mathcal{N}_S(x)$$

$$\Leftrightarrow -\nabla f(x) \in \mathcal{N}_S(x)$$

$$\Leftrightarrow -\nabla f(x)^T x \geq -\nabla f(x)^T y \text{ for all } y \in S$$

Получение условия оптимальности первого порядка

Заметим, что

$$0 \in \partial(f(x) + I_S(x))$$

$$\Leftrightarrow 0 \in \{\nabla f(x)\} + \mathcal{N}_S(x)$$

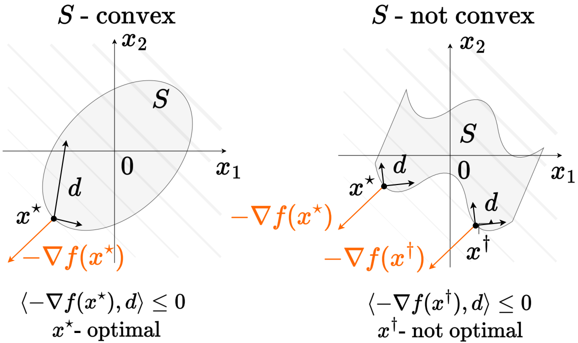
$$\Leftrightarrow -\nabla f(x) \in \mathcal{N}_S(x)$$

$$\Leftrightarrow -\nabla f(x)^T x \geq -\nabla f(x)^T y \text{ for all } y \in S$$

$$\Leftrightarrow \nabla f(x)^T (y - x) \geq 0 \text{ for all } y \in S$$

что и требовалось.
Замечание: условие $0 \in \partial f(x) + \mathcal{N}_S(x)$ является **общим условием** оптимальности для выпуклых задач. Однако с ним не всегда удобно работать (KKT удобнее, про них позже).

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2}$$



Пример 1

Example

Найти $\partial f(x)$, if $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$

Пример 1

> **Example**
>
> Найти $\partial f(x)$, if $f(x) = |x-1| + |x+1|$

$$
\partial f_1(x) = \begin{cases} -1, & x < 1 \\ [-1; 1], & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \qquad \partial f_2(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ [-1; 1], & x = -1 \\ 1, & x > -1 \end{cases}
$$

Пример 1

Example

Найти $\partial f(x)$, if $f(x) = |x-1| + |x+1|$

$$\partial f_1(x) = \begin{cases} -1, & x < 1 \\ [-1;1], & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \qquad \partial f_2(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ [-1;1], & x = -1 \\ 1, & x > -1 \end{cases}$$

Итак,

$$\partial f(x) = \begin{cases} -2, & x < -1 \\ [-2;0], & x = -1 \\ 0, & -1 < x < 1 \\ [0;2], & x = 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

Пример 2

Найти $\partial f(x)$ if $f(x) = [\max(0, f_0(x))]^q$. Здесь $f_0(x)$ - выпуклая функция на открытом множестве S, и $q \geq 1$.

Пример 2

Найти $\partial f(x)$ if $f(x) = [\max(0, f_0(x))]^q$. Здесь $f_0(x)$ - выпуклая функция на открытом множестве S, и $q \geq 1$.

Согласно теореме о производной композиции функций (функция $\varphi(x) = x^q$ дифференцируема) и обозначая $g(x) = \max(0, f_0(x))$, имеем:

$$\partial f(x) = q(g(x))^{q-1} \partial g(x)$$

Пример 2

Найти $\partial f(x)$ if $f(x) = [\max(0, f_0(x))]^q$. Здесь $f_0(x)$ - выпуклая функция на открытом множестве S, и $q \geq 1$.

Согласно теореме о производной композиции функций (функция $\varphi(x) = x^q$ дифференцируема) и обозначая $g(x) = \max(0, f_0(x))$, имеем:

$$\partial f(x) = q(g(x))^{q-1} \partial g(x)$$

По теореме о субдифференциале поточечного максимума

$$\partial g(x) = \begin{cases} \partial f_0(x), & f_0(x) > 0, \\ \{0\}, & f_0(x) < 0, \\ \{a \mid a = \lambda a', \; 0 \leq \lambda \leq 1, \; a' \in \partial f_0(x)\}, & f_0(x) = 0 \end{cases}$$

Пример 3. Субдифференциал нормы

Пусть V - конечномерное евклидово пространство, и $x_0 \in V$. Пусть $\|\cdot\|$ - произвольная норма в пространстве V, и пусть $\|\cdot\|_*$ - соответствующая сопряженная норма. Тогда,

$$\partial\|\cdot\|(x_0) = \begin{cases} B_{\|\cdot\|_*}(0,1), & \text{если } x_0 = 0, \\ \{s \in V : \|s\|_* \leq 1; \langle s, x_0\rangle = \|x_0\|\} = \{s \in V : \|s\|_* = 1; \langle s, x_0\rangle = \|x_0\|\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Где $B_{\|\cdot\|_*}(0,1)$ есть замкнутый единичный относительно сопряженной нормы шар с центром в нуле. Другими словами, вектор $s \in V$ с $\|s\|_* = 1$ является субградиентом нормы $\|\cdot\|$ в точке $x_0 \neq 0$ тогда и только тогда, когда неравенство Гёльдера $\langle s, x_0\rangle \leq \|x_0\|$ переходит в равенство.

Пример 3. Субдифференциал нормы

Пусть V - конечномерное евклидово пространство, и $x_0 \in V$. Пусть $\|\cdot\|$ - произвольная норма в пространстве V, и пусть $\|\cdot\|_*$ - соответствующая сопряженная норма. Тогда,

$$\partial\|\cdot\|(x_0) = \begin{cases} B_{\|\cdot\|_*}(0,1), & \text{если } x_0 = 0, \\ \{s \in V : \|s\|_* \leq 1; \langle s, x_0\rangle = \|x_0\|\} = \{s \in V : \|s\|_* = 1; \langle s, x_0\rangle = \|x_0\|\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Где $B_{\|\cdot\|_*}(0,1)$ есть замкнутый единичный относительно сопряженной нормы шар с центром в нуле. Другими словами, вектор $s \in V$ с $\|s\|_* = 1$ является субградиентом нормы $\|\cdot\|$ в точке $x_0 \neq 0$ тогда и только тогда, когда неравенство Гёльдера $\langle s, x_0\rangle \leq \|x_0\|$ переходит в равенство.

Пусть $s \in V$. По определению $s \in \partial\|\cdot\|(x_0)$ если и только если

$$\langle s, x\rangle - \|x\| \leq \langle s, x_0\rangle - \|x_0\|, \text{ for all } x \in V,$$

что равносильно

$$\sup_{x\in V}\{\langle s, x\rangle - \|x\|\} \leq \langle s, x_0\rangle - \|x_0\|.$$

По определению супремума, последнее равносильно

$$\sup_{x\in V}\{\langle s, x\rangle - \|x\|\} = \langle s, x_0\rangle - \|x_0\|.$$

Пример 3. Субдифференциал нормы

Пусть V - конечномерное евклидово пространство, и $x_0 \in V$. Пусть $\|\cdot\|$ - произвольная норма в пространстве V, и пусть $\|\cdot\|_*$ - соответствующая сопряженная норма. Тогда,

$$\partial\|\cdot\|(x_0) = \begin{cases} B_{\|\cdot\|_*}(0,1), & \text{если } x_0 = 0, \\ \{s \in V : \|s\|_* \leq 1; \langle s, x_0\rangle = \|x_0\|\} = \{s \in V : \|s\|_* = 1; \langle s, x_0\rangle = \|x_0\|\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Где $B_{\|\cdot\|_*}(0,1)$ есть замкнутый единичный относительно сопряженной нормы шар с центром в нуле. Другими словами, вектор $s \in V$ с $\|s\|_* = 1$ является субградиентом нормы $\|\cdot\|$ в точке $x_0 \neq 0$ тогда и только тогда, когда неравенство Гёльдера $\langle s, x_0\rangle \leq \|x_0\|$ переходит в равенство.

Пусть $s \in V$. По определению $s \in \partial\|\cdot\|(x_0)$ если и только если

$$\langle s, x\rangle - \|x\| \leq \langle s, x_0\rangle - \|x_0\|, \text{ for all } x \in V,$$

что равносильно

$$\sup_{x\in V}\{\langle s, x\rangle - \|x\|\} \leq \langle s, x_0\rangle - \|x_0\|.$$

По определению супремума, последнее равносильно

$$\sup_{x\in V}\{\langle s, x\rangle - \|x\|\} = \langle s, x_0\rangle - \|x_0\|.$$

Важно отметить, что выражение слева есть супремум из определения сопряженной функции по Фенхелю для нормы, которая, как известно, записывается так:

$$\sup_{x\in V}\{\langle s, x\rangle - \|x\|\} = \begin{cases} 0, & \text{if } \|s\|_* \leq 1, \\ +\infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Таким образом, выражение равносильно $\|s\|_* \leq 1$ и $\langle s, x_0\rangle = \|x_0\|$.

Пример 3. Субдифференциал нормы

Следовательно, остаётся заметить, что для $x_0 \neq 0$ неравенство $\|s\|_* \leq 1$ должно переходить в равенство, поскольку при $\|s\|_* < 1$ неравенство Гёльдера влечёт $\langle s, x_0 \rangle \leq \|s\|_* \|x_0\| < \|x_0\|$.

Сопряженная норма в примере выше появилась не случайно. Оказывается, что совершенно аналогичным образом для произвольной функции f (не только для нормы) её субдифференциал может быть описан в терминах двойственного объекта - сопряженной по Фенхелю функции.