Сопряжённые функции

Сопряжённые функции

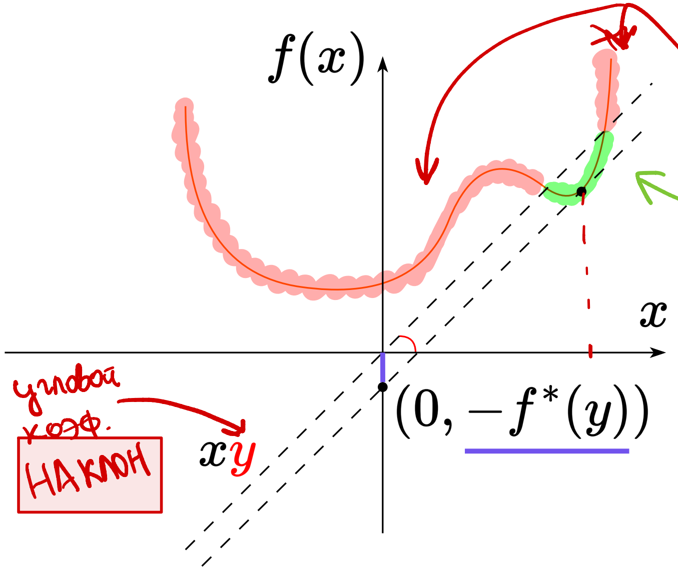
50

Напомним, что для отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функция, определяемая как

$$\boxed{f^*(y) = \max_x \left[y^T x - f(x) \right]}$$

называется его сопряжённой. Выражение выше называется преобразованием Лежандра.

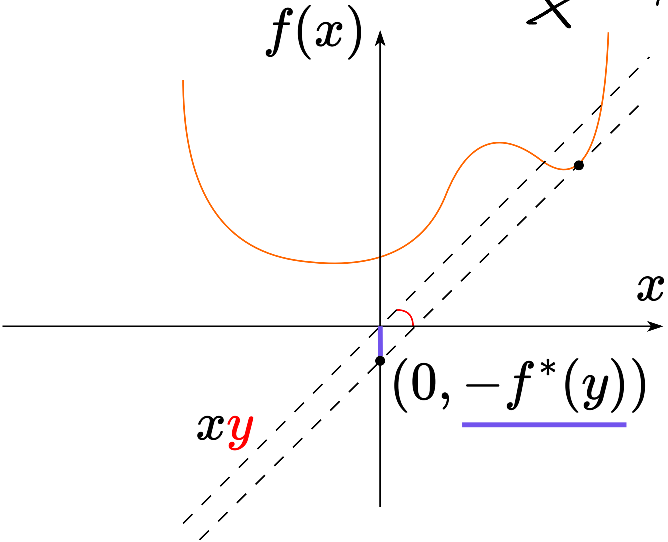
70



$y^T x - f(x)$

выпуклые замкнутые функции допускают два разных способа описания (имеют свойств. природу)

Сопряжённые функции



$(f^*(y))' = x$

Напомним, что для отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функция, определяемая как

$$f^*(y) = \max_x \left[y^T x - f(x)\right]$$

называется его сопряжённой. Выражение выше называется преобразованием Лежандра.

какая-бы не была

$f(x) \Rightarrow f^*(y)$ всегда выпукл

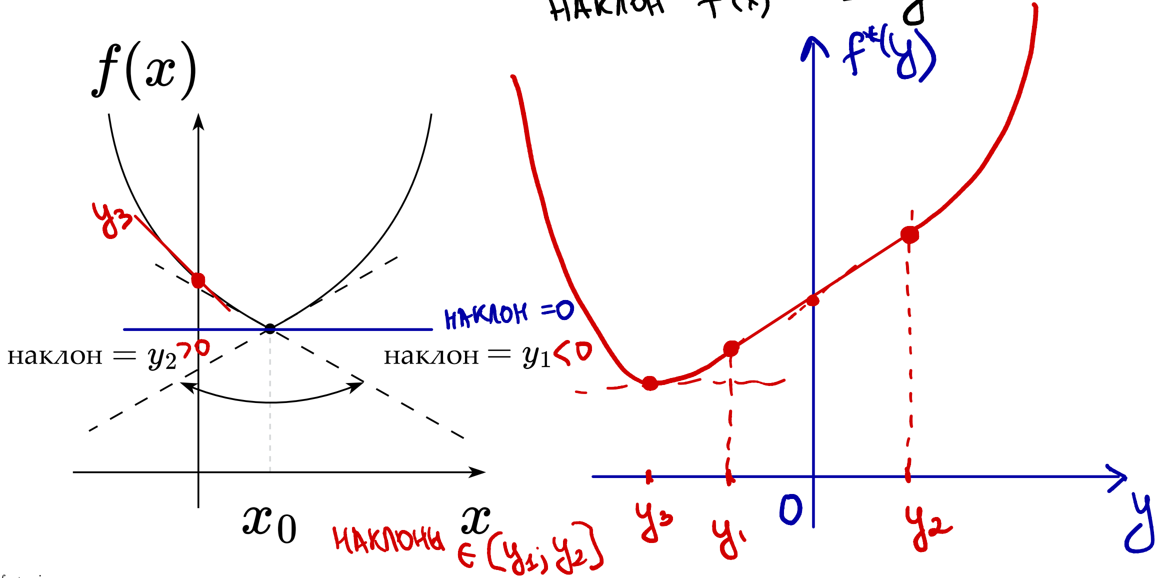
как поточечный MAX

вып. функций

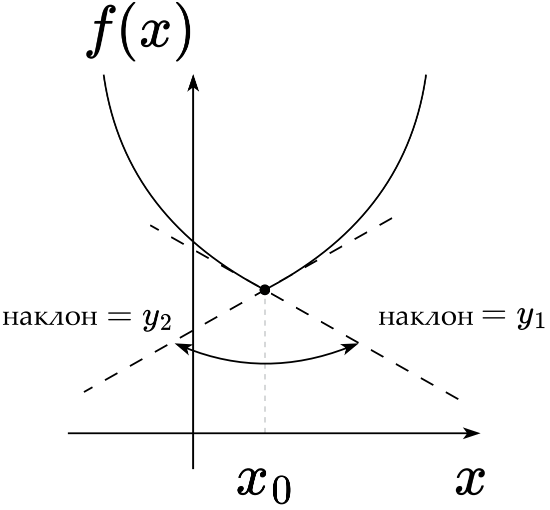
Геометрическая интуиция

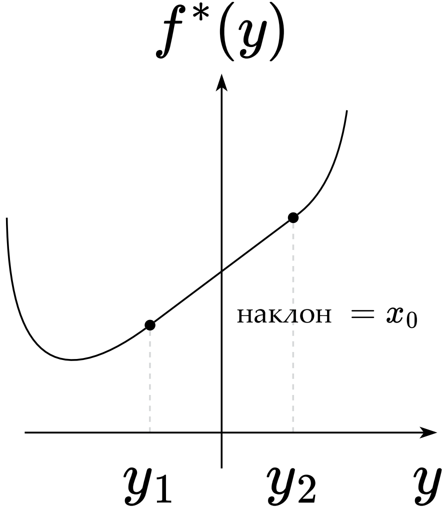
НАКЛОН $f^*(y) = x$

НАКЛОН $f(x) = y$

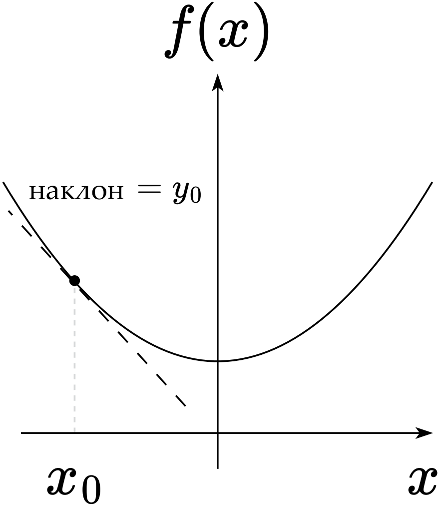


Геометрическая интуиция





Наклон f и f^*



пример: $f(x) = \frac{\mu}{2} x^2$

$f^*(y) = ?$

$$f^*(y) = \max_{x \in \mathbb{R}} \left[xy - f(x) \right] =$$

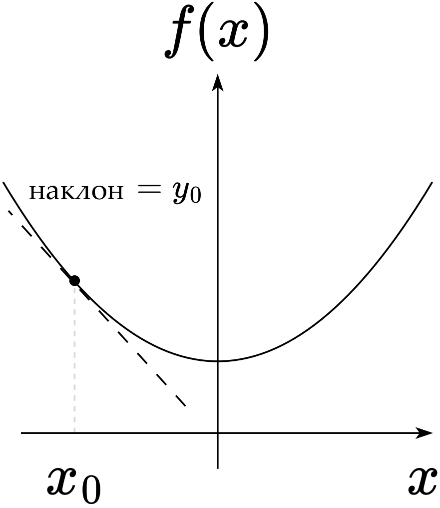
$$= \max_{x \in \mathbb{R}} \left[xy - \frac{\mu}{2} x^2 \right] =$$

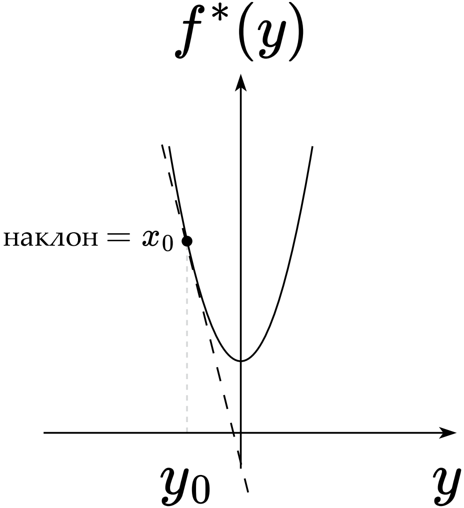
$y - \mu x = 0$

$x = \frac{1}{\mu} y$

$$= \frac{1}{\mu} y^2 - \frac{\mu}{2} \frac{1}{\mu^2} y^2 = \frac{1}{2\mu} y^2$$

Наклон f и f^*





Наклон f и f^*

Предположим, что f — замкнутая и выпуклая функция. Тогда f сильно выпукла с параметром $\mu \Leftrightarrow \nabla f^*$ является липшицевой с параметром $1/\mu$.

μ сильная выпуклость $f(x)$ $\Longleftrightarrow$ $\frac{1}{\mu}$ гладкость $f^*(y)$

Наклон f и f^*

Предположим, что f — замкнутая и выпуклая функция. Тогда f сильно выпукла с параметром $\mu \Leftrightarrow \nabla f^*$ является липшицевой с параметром $1/\mu$.

Доказательство "$\Rightarrow$": напомним, если g сильно выпукла с минимайзером x, то

$$g(y) \geq g(x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|^2, \quad \text{для всех } y$$

Наклон f и f^*

Предположим, что f — замкнутая и выпуклая функция. Тогда f сильно выпукла с параметром $\mu \Leftrightarrow \nabla f^*$ является липшицевой с параметром $1/\mu$.

Доказательство "$\Rightarrow$": напомним, если g сильно выпукла с минимайзером x, то

$$g(y) \geq g(x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|^2, \quad \text{для всех } y$$

$$\|\nabla f^*(u) - \nabla f^*(v)\| \leq \frac{1}{\mu}\|u - v\|$$

Введём обозначения $\underline{x_u = \nabla f^*(u)}$ и $\underline{x_v = \nabla f^*(v)}$, тогда

$f(x)$ – μ сильн.

$f_u(x) = f(x) - u^T x$

$f_v(x) = f(x) - v^T x$

$$\underbrace{f(x_v) - u^T x_v}_{f_u(x_v)} \geq \underbrace{f(x_u) - u^T x_u}_{f_u(x_u)} + \frac{\mu}{2}\|x_u - x_v\|^2$$

$$\underbrace{f(x_u) - v^T x_u}_{f_v(x_u)} \geq \underbrace{f(x_v) - v^T x_v}_{f_v(x_v)} + \frac{\mu}{2}\|x_u - x_v\|^2$$

μ- сильн. $f_u(x)$

μ- сильн. $f_v(x)$

$$-u^T x_v - v^T x_u \geq -u^T x_u - v^T x_v + \mu\|x_u - x_v\|^2$$

$$u^T(x_u - x_v) - v^T(x_u - x_v) \geq \mu\|x_u - x_v\|^2$$

$$\|u - v\|\|x_u - x_v\| \geq (u - v)^T(x_u - x_v) \geq \mu\|x_u - x_v\|^2$$

Наклон f и f^*

Предположим, что f — замкнутая и выпуклая функция. Тогда f сильно выпукла с параметром $\mu \Leftrightarrow \nabla f^*$ является липшицевой с параметром $1/\mu$.

Доказательство "$\Rightarrow$": напомним, если g сильно выпукла с минимайзером x, то

$$g(y) \geq g(x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|^2, \quad \text{для всех } y$$

Введём обозначения $x_u = \nabla f^*(u)$ и $x_v = \nabla f^*(v)$, тогда

$$f(x_v) - u^T x_v \geq f(x_u) - u^T x_u + \frac{\mu}{2}\|x_u - x_v\|^2$$

$$f(x_u) - v^T x_u \geq f(x_v) - v^T x_v + \frac{\mu}{2}\|x_u - x_v\|^2$$

Сложив эти неравенства, применяя неравенство Коши–Буняковского-Шварца и преобразуя, получаем:

$$\|x_u - x_v\| \leq \frac{1}{\mu}\|u - v\|$$

Наклон f и f^*

$f^*(y) = \sup_x (x^Ty - f(x)) \Rightarrow \min_x (f(x) - x^Ty) = -f^*(y)$

Доказательство "$\Leftarrow$": для простоты обозначим $g = f^*$ и $L = \frac{1}{\mu}$. Так как ∇g является липшицевой с константой L, то и $g_x(z) = g(z) - \nabla g(x)^T z$ также липшицева, следовательно

Липшицева парабола

$\nabla g_x(z) = \nabla g(z) - \nabla g(x)$

$$
g_x(z) \leq g_x(y) + \nabla g_x(y)^T(z-y) + \frac{L}{2}\|z-y\|_2^2 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n
$$

минимум

$\min_z g_x(z) =$

$\min_z (g(z) - \nabla g(x)^T z) =$

$= -g^*(\nabla g(x)) = \underbrace{g(x) - \langle \nabla g(x), x\rangle}_{g_x(x)}$

Минимизируем по z:

$\nabla g_x(y) + L(z-y) = 0 \Rightarrow$

$z - y = -\frac{1}{L}\nabla g_x(y)$

$z = y - \frac{1}{L}\nabla g_x(y) =$

$= y - \frac{1}{L}(\nabla g(y) - \nabla g(x))$

$g_x(y) + \nabla g_x(y)^T \cdot \left(-\frac{1}{L}\right)\nabla g_x(y) + \frac{L}{2}\frac{1}{L^2}\|\nabla g_x(y)\|^2$

$g_x(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla g_x(y)\|^2$

$g^*(u) = \sup_z\{u^Tz - g(z)\}$ возьмём $u = \nabla g(x)$. т.к. $g(z)$ — выпукла, то: $g(z) \geq g(x) + \langle \nabla g(x), z - x\rangle$

$\sup_z\{\nabla g(x)^T z - g(z)\} = g^*(\nabla g(x))$

$$
\boxed{g_x(x) \leq g_x(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla g_x(y)\|^2}
$$

$z = x$ $\quad \sup_z(\langle g(x), z\rangle - g(z)) \leq \langle \nabla g(x), x\rangle - g(x)$

$\Rightarrow g^*(\nabla g(x)) = \langle \nabla g(x), x\rangle - g(x)$

Наклон f и f^*

Доказательство "$\Leftarrow$": для простоты обозначим $g = f^*$ и $L = \frac{1}{\mu}$. Так как ∇g является липшицевой с константой L, то и $g_x(z) = g(z) - \nabla g(x)^T z$ также липшицева, следовательно

$\nabla g_x(y) = \nabla g(y) - \nabla g(x)$

$$g_x(z) \leq g_x(y) + \nabla g_x(y)^T(z-y) + \frac{L}{2}\|z-y\|_2^2$$

$g_x(x) \leq g_x(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla g_x(y)\|^2$

Минимизируя обе части по z и преобразуя, получаем

$$\frac{1}{2L}\|\nabla g(x) - \nabla g(y)\|^2 \leq g(y) - g(x) + \nabla g(x)^T(x-y)$$

$g_x(x) = g(x) - \nabla g(x)^T x$

$g_x(y) = g(y) - \nabla g(x)^T y$

Наклон f и f^*

Доказательство "$\Leftarrow$": для простоты обозначим $g = f^*$ и $L = \frac{1}{\mu}$. Так как ∇g является липшицевой с константой L, то и $g_x(z) = g(z) - \nabla g(x)^T z$ также липшицева, следовательно

$$
g_x(z) \leq g_x(y) + \nabla g_x(y)^T (z - y) + \frac{L}{2} \|z - y\|_2^2
$$

Минимизируя обе части по z и преобразуя, получаем

$$
\frac{1}{2L} \|\nabla g(x) - \nabla g(y)\|^2 \leq g(y) - g(x) + \nabla g(x)^T (x - y)
$$

Меняя местами x, y и складывая, получаем

$$
\frac{1}{L} \|\nabla g(x) - \nabla g(y)\|^2 \leq (\nabla g(x) - \nabla g(y))^T (x - y)
$$

Наклон f и f^*

Доказательство "$\Leftarrow$": для простоты обозначим $g = f^*$ и $L = \frac{1}{\mu}$. Так как ∇g является липшицевой с константой L, то и $g_x(z) = g(z) - \nabla g(x)^T z$ также липшицева, следовательно

$$
g_x(z) \leq g_x(y) + \nabla g_x(y)^T (z - y) + \frac{L}{2}\|z - y\|_2^2
$$

Минимизируя обе части по z и преобразуя, получаем

$$
\frac{1}{2L}\|\nabla g(x) - \nabla g(y)\|^2 \leq g(y) - g(x) + \nabla g(x)^T (x - y)
$$

Меняя местами x, y и складывая, получаем

$\|u - v\|^2 \leq L\left((u-v)^T(x-y)\right)$

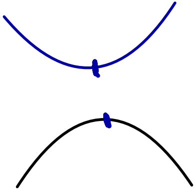
$$
\frac{1}{L}\|\nabla g(x) - \nabla g(y)\|^2 \leq (\nabla g(x) - \nabla g(y))^T (x - y)
$$

Положим $u = \nabla g(x)$, $v = \nabla g(y)$; тогда $x \in \partial g^*(u)$, $y \in \partial g^*(v)$, и выше получаем

$$
(x - y)^T (u - v) \geq \frac{\|u - v\|^2}{L},
$$

что и доказывает утверждение.

Свойства сопряжённых функций



Напомним, что для отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функция, определяемая как

$$f^*(y) = \max_x \left[y^T x - f(x)\right]$$

называется его сопряжённой.

- Сопряжённые функции часто возникают в двойственных задачах, так как

$$-f^*(y) = \min_x \left[f(x) - y^T x\right]$$

Свойства сопряжённых функций

Напомним, что для отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функция, определяемая как

$$f^*(y) = \max_x \left[y^T x - f(x) \right]$$

называется его сопряжённой.

- Сопряжённые функции часто возникают в двойственных задачах, так как

$$-f^*(y) = \min_x \left[f(x) - y^T x \right]$$

- Если f замкнута и выпукла, то $f^{**} = f$. Кроме того,

$$\boxed{x \in \partial f^*(y) \Leftrightarrow y \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \arg\min_z \left[f(z) - y^T z \right]}$$

Свойства сопряжённых функций

Напомним, что для отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функция, определяемая как

$$f^*(y) = \max_x \left[y^T x - f(x)\right]$$

называется его сопряжённой.

- Сопряжённые функции часто возникают в двойственных задачах, так как

$$-f^*(y) = \min_x \left[f(x) - y^T x\right]$$

- Если f замкнута и выпукла, то $f^{**} = f$. Кроме того,

$$x \in \partial f^*(y) \Leftrightarrow y \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \arg\min_z \left[f(z) - y^T z\right]$$

- Если f строго выпукла, то

$$\nabla f^*(y) = \arg\min_z \left[f(z) - y^T z\right]$$

Свойства сопряжённой функции (доказательства)

Покажем, что $x \in \partial f^*(y) \Leftrightarrow y \in \partial f(x)$, предполагая, что f выпукла и замкнута.

- **Доказательство** $\Leftarrow$: Пусть $y \in \partial f(x)$. Тогда $x \in M_y$ — множество точек максимума $y^T z - f(z)$ по z. Но

$$
f^*(y) = \max_z \{y^T z - f(z)\} \quad \text{and} \quad \partial f^*(y) = \text{cl}(\text{conv}(\bigcup_{z \in M_y} \{z\})).
$$

Следовательно, $x \in \partial f^*(y)$.

Свойства сопряжённой функции (доказательства)

Покажем, что $x \in \partial f^*(y) \Leftrightarrow y \in \partial f(x)$, предполагая, что f выпукла и замкнута.

- **Доказательство** $\Leftarrow$: Пусть $y \in \partial f(x)$. Тогда $x \in M_y$ — множество точек максимума $y^T z - f(z)$ по z. Но

$$
f^*(y) = \max_z \{y^T z - f(z)\} \quad \text{and} \quad \partial f^*(y) = \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(\bigcup_{z \in M_y} \{z\})).
$$

  Следовательно, $x \in \partial f^*(y)$.

- **Доказательство** $\Rightarrow$: Из показанного выше, если $x \in \partial f^*(y)$, то $y \in \partial f^*(x)$, но $f^{**} = f$.

Свойства сопряжённой функции (доказательства)

Покажем, что $x \in \partial f^*(y) \Leftrightarrow y \in \partial f(x)$, предполагая, что f выпукла и замкнута.

- **Доказательство** $\Leftarrow$: Пусть $y \in \partial f(x)$. Тогда $x \in M_y$ — множество точек максимума $y^T z - f(z)$ по z. Но

$$f^*(y) = \max_z \{y^T z - f(z)\} \quad \text{and} \quad \partial f^*(y) = \text{cl}(\text{conv}(\bigcup_{z \in M_y} \{z\})).$$

  Следовательно, $x \in \partial f^*(y)$.

- **Доказательство** $\Rightarrow$: Из показанного выше, если $x \in \partial f^*(y)$, то $y \in \partial f^*(x)$, но $f^{**} = f$.

Свойства сопряжённой функции (доказательства)

Покажем, что $x \in \partial f^*(y) \Leftrightarrow y \in \partial f(x)$, предполагая, что f выпукла и замкнута.

- **Доказательство** $\Leftarrow$: Пусть $y \in \partial f(x)$. Тогда $x \in M_y$ — множество точек максимума $y^T z - f(z)$ по z. Но

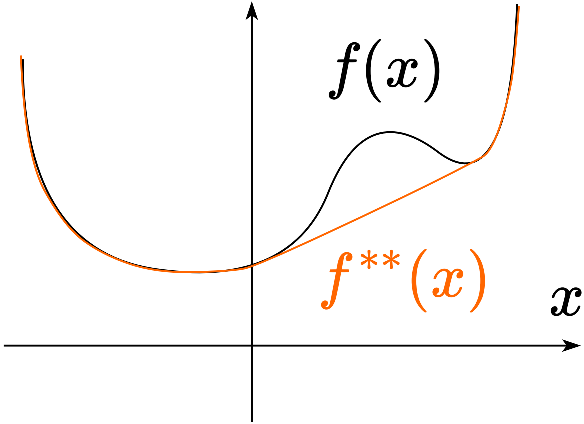
  $$f^*(y) = \max_z \{y^T z - f(z)\} \quad \text{and} \quad \partial f^*(y) = \text{cl}(\text{conv}(\bigcup_{z \in M_y} \{z\})).$$

  Следовательно, $x \in \partial f^*(y)$.
- **Доказательство** $\Rightarrow$: Из показанного выше, если $x \in \partial f^*(y)$, то $y \in \partial f^*(x)$, но $f^{**} = f$.

Очевидно, $y \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \arg\min_z \{f(z) - y^T z\}$

Наконец, если f строго выпукла, то мы знаем, что $f(z) - y^T z$ имеет единственный минимизатор по z, и им должна быть $\nabla f^*(y)$.

Прямое следствие нервенства Фенхеля-Юнга $f(x) \geq f^{\star\star}(x)$.



Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = ax + b$.

1. По определению:

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} [yx - f(x)] = \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x, y) \quad \textbf{dom } f^* = \{y \in \mathbb{R} : \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x, y) \text{ is finite}\}$$

$$\sup\left[yx - ax - b\right] = \sup_{x}\left[(y-a)x - b\right]$$

$$y = a \Rightarrow f^*(y) = -b$$

$y \neq 0 \Rightarrow \sup$ бесконечн

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = ax + b$.

1. По определению:

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} [yx - f(x)] = \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x, y) \quad \mathbf{dom}\ f^* = \{y \in \mathbb{R} : \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x, y) \text{ is finite}\}$$

2. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = yx - f(x) = yx - ax - b = x(y - a) - b.$$

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = ax + b$.

1. По определению:

$$f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}}[yx - f(x)] = \sup_{x\in\mathbb{R}} g(x,y) \quad \textbf{dom } f^* = \{y \in \mathbb{R} : \sup_{x\in\mathbb{R}} g(x,y) \text{ is finite}\}$$

2. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x,y) = yx - f(x) = yx - ax - b = x(y-a) - b.$$

3. Зададим область определения функции (т.е. те y, для которых $\sup$ конечен). Это единственная точка, $y = a$. В противном случае можно выбрать такое x, что супремум будет бесконечен.

$$f^*(y) = \begin{cases} -b, & y = a \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = ax + b$.

1. По определению:

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} [yx - f(x)] = \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x, y) \quad \mathbf{dom}\ f^* = \{y \in \mathbb{R} : \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x, y) \text{ is finite}\}$$

2. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = yx - f(x) = yx - ax - b = x(y - a) - b.$$

3. Зададим область определения функции (т.е. те y, для которых $\sup$ конечен). Это единственная точка, $y = a$. В противном случае можно выбрать такое x, что супремум будет бесконечен.
4. Таким образом, имеем: $\mathbf{dom}\ f^* = \{a\}; f^*(a) = -b$

Пример

Question

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}_{++}$.

$y = 0 \quad f^*(0) = 0$

$y > 0 \quad \sup +\infty$

$y < 0$

$$f^*(y) = \sup_x \left[xy - \frac{1}{x} \right] =$$

$$y - \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 0$$

$$x^2 = -\frac{1}{y} \qquad x = \frac{1}{\sqrt{-y}}$$

$$\frac{1}{x} = \sqrt{-y}$$

$$\overset{y<0}{=} \frac{1}{\sqrt{-y}} \cdot y - \sqrt{-y} = -2\sqrt{-y}$$

$$\sqrt{-y} \cdot \sqrt{-y} = -y$$

Ответ: $f^*(y) = -2\sqrt{-y}, \; y \le 0$

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = -\log x, \quad x \in \mathbb{R}_{++}$.

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = yx + \log x.$$

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = -\log x, \;\; x \in \mathbb{R}_{++}$.

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = yx + \log x.$$

2. Эта функция неограничена сверху при $y \geq 0$. Следовательно, область определения f^* является $\mathbf{dom}\; f^* = \{y < 0\}$.

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = -\log x, \quad x \in \mathbb{R}_{++}$.

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = yx + \log x.$$

2. Эта функция неограничена сверху при $y \geq 0$. Следовательно, область определения f^* является $\mathbf{dom}\ f^* = \{y < 0\}$.
3. Эта функция выпукла и её максимум достигается в точке с нулевым градиентом:

$$\frac{\partial}{\partial x}(yx + \log x) = \frac{1}{x} + y = 0.$$

   Таким образом, имеем $x = -\dfrac{1}{y}$ и сопряжённая функция:

$$f^*(y) = -\log(-y) - 1.$$

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = e^x$.

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x,y) = \langle y, x \rangle - f(x) = yx - e^x.$$

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = e^x$.

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = yx - e^x.$$

2. Эта функция неограничена сверху при $y < 0$. Следовательно, область определения f^* является $\mathbf{dom}\ f^* = \{y \geq 0\}$.

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = e^x$.

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = yx - e^x.$$

2. Эта функция неограничена сверху при $y < 0$. Следовательно, область определения f^* является $\mathbf{dom}\ f^* = \{y \geq 0\}$.
3. Максимум этой функции достигается при $x = \log y$. Следовательно:

$$f^*(y) = y \log y - y,$$

полагая $0 \log 0 = 0$.

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = x \log x, x \neq 0$, и $f(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+$.

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = xy - x \log x.$$

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = x \log x, x \neq 0,$ и $f(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+$.

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = xy - x \log x.$$

2. Эта функция ограничена сверху для всех y. Следовательно, $\mathbf{dom}\ f^* = \mathbb{R}$.

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = x\log x, x \neq 0$, и $f(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+$.

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x\rangle - f(x) = xy - x\log x.$$

2. Эта функция ограничена сверху для всех y. Следовательно, $\mathbf{dom}\ f^* = \mathbb{R}$.
3. Максимум этой функции достигается при $x = e^{y-1}$. Следовательно:

$$f^*(y) = e^{y-1}.$$

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax, \quad A \in \mathbb{S}^n_{++}$.

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = y^T x - \frac{1}{2}x^T Ax.$$

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax, \quad A \in \mathbb{S}^n_{++}$.

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = y^T x - \frac{1}{2}x^T Ax.$$

2. Эта функция ограничена сверху для всех y. Следовательно, $\mathbf{dom}\ f^* = \mathbb{R}$.

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x, \quad A \in \mathbb{S}^n_{++}$.

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = y^T x - \frac{1}{2} x^T A x.$$

2. Эта функция ограничена сверху для всех y. Следовательно, $\mathbf{dom}\ f^* = \mathbb{R}$.
3. Максимум этой функции достигается при $x = A^{-1} y$. Следовательно:

$$f^*(y) = \frac{1}{2} y^T A^{-1} y.$$

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = \max_i x_i, \quad x \in \mathbb{R}^n$.

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = y^T x - \max_i x_i.$$

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = \max\limits_i x_i, \quad x \in \mathbb{R}^n$.

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = y^T x - \max_i x_i.$$

2. Обратим внимание, что если вектор y имеет хотя бы одну отрицательную компоненту, эта функция не ограничена по x.

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = \max_i x_i, \quad x \in \mathbb{R}^n$.

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = y^T x - \max_i x_i.$$

2. Обратим внимание, что если вектор y имеет хотя бы одну отрицательную компоненту, эта функция не ограничена по x.
3. Если $y \succeq 0$ и $1^T y > 1$, то $y \notin \mathbf{dom}\ f^*(y)$.

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = \max_i x_i, \quad x \in \mathbb{R}^n$.

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = y^T x - \max_i x_i.$$

2. Обратим внимание, что если вектор y имеет хотя бы одну отрицательную компоненту, эта функция не ограничена по x.
3. Если $y \succeq 0$ и $1^T y > 1$, то $y \notin \mathbf{dom}\ f^*(y)$.
4. Если $y \succeq 0$ и $1^T y < 1$, то $y \notin \mathbf{dom}\ f^*(y)$.

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = \max\limits_i x_i, \quad x \in \mathbb{R}^n$.

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = y^T x - \max_i x_i.$$

2. Обратим внимание, что если вектор y имеет хотя бы одну отрицательную компоненту, эта функция не ограничена по x.
3. Если $y \succeq 0$ и $1^T y > 1$, то $y \notin \mathbf{dom}\ f^*(y)$.
4. Если $y \succeq 0$ и $1^T y < 1$, то $y \notin \mathbf{dom}\ f^*(y)$.
5. Остается только случай $y \succeq 0$ и $1^T y = 1$. В этом случае, $x^T y \leq \max\limits_i x_i$.

Пример

Example

Найдите $f^*(y)$, если $f(x) = \max_i x_i, \quad x \in \mathbb{R}^n$.

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = y^T x - \max_i x_i.$$

2. Обратим внимание, что если вектор y имеет хотя бы одну отрицательную компоненту, эта функция не ограничена по x.
3. Если $y \succeq 0$ и $1^T y > 1$, то $y \notin \textbf{dom } f^*(y)$.
4. Если $y \succeq 0$ и $1^T y < 1$, то $y \notin \textbf{dom } f^*(y)$.
5. Остается только случай $y \succeq 0$ и $1^T y = 1$. В этом случае, $x^T y \leq \max_i x_i$.
6. Следовательно, $f^*(y) = 0$.