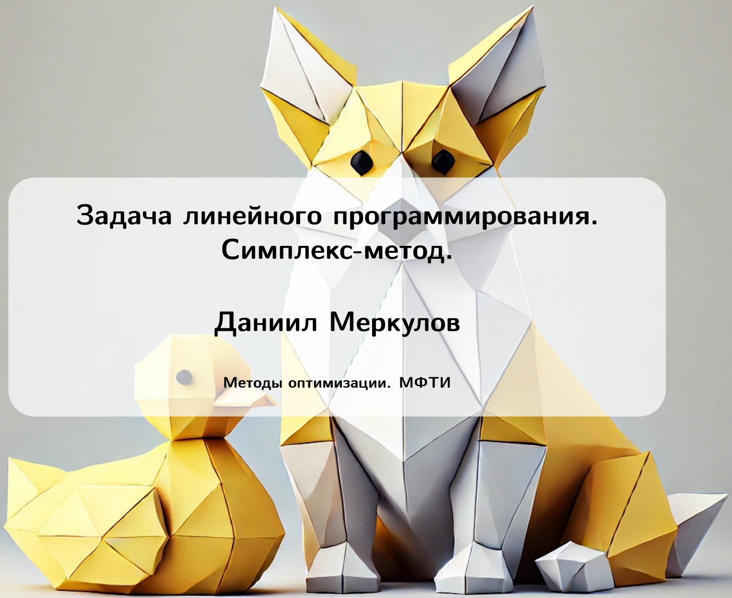


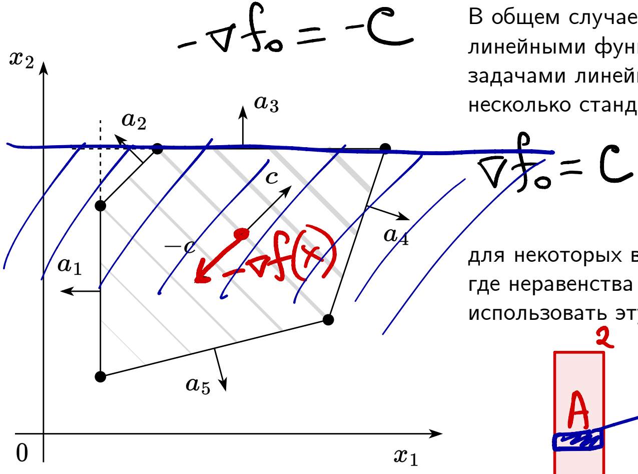
Задача линейного программирования. Симплекс-метод.

Даниил Меркулов

Методы оптимизации. МФТИ

Примеры задач линейного программирования

Что такое линейное программирование?

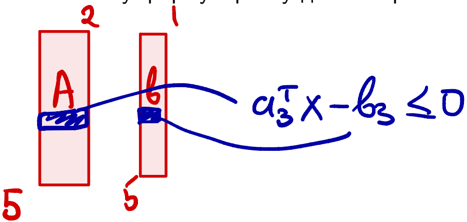


В общем случае все задачи с линейной целевой функцией и линейными функциональными ограничениями можно считать задачами линейного программирования. Однако существует несколько стандартных формулировок.

$$
\boxed{\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\ \text{s.t. } &Ax \preceq b \end{aligned}} \qquad \text{(LP.Basic)}
$$

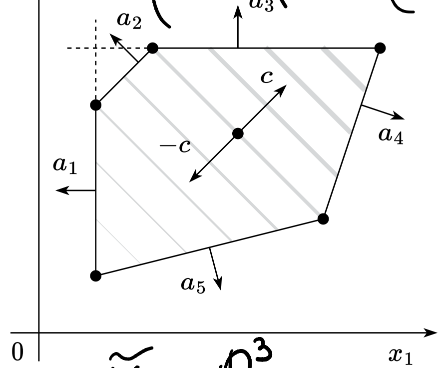
S

для некоторых векторов $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ и матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, где неравенства — покомпонентные. Мы будем часто использовать эту формулировку для построения интуиции.



Что такое линейное программирование?

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$



$$\tilde{X} \in \mathbb{R}^3$$

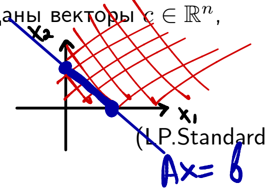
$$\tilde{X} = \tilde{X}^+ - \tilde{X}^-$$

В общем случае все задачи с линейной целевой функцией и линейными функциональными ограничениями можно считать задачами линейного программирования. Однако существует несколько стандартных формулировок.

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\ &\text{s.t. } Ax \leq b \end{aligned} \qquad \text{(LP.Basic)}$$

для некоторых векторов $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ и матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, где неравенства — покомпонентные. Мы будем часто использовать эту формулировку для построения интуиции. Широко используется **стандартная форма** записи задачи линейного программирования. Пусть заданы векторы $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ и матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\ &\text{s.t. } Ax = b \\ &\quad x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \end{aligned} \qquad \text{(LP.Standard)}$$

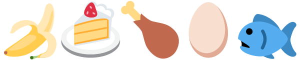


Пример: задача о диете

p продуктов

$x \in \mathbb{R}^p$, $c \in \mathbb{R}^p$

цены на 100г



Белки	
Жиры	
Углеводы	Количество на 100г
Калории	$W \in \mathbb{R}^{n\times p}$
	$W_{кб}$ $W_{кт}$ $W_{кк}$ $W_{кя}$ $W_{кр}$
Витамин D	
вкус	8 6 8 7 0

n нутриентов

$c^T x$ – стоимость корзины

$c \in \mathbb{R}^p$, цена за 100г

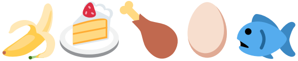
$r \in \mathbb{R}^n$, ограничения

$x \in \mathbb{R}^p$, количество продуктов

$$\min_{x\in\mathbb{R}^p} c^T x$$
$$Wx \succeq r$$
$$x \succeq 0$$

$$c^T x \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}$$
$$x \geq 0$$
$$W_к^T x \geq r^к_{min}$$
$$W_б^T x \geq r^б_{min}$$
$$x \leq 1$$
$$W_{вк}^T x \geq r^{вкус}_{min}$$

Пример: задача о диете



$$
\begin{array}{c}
\text{Белки} \\ \text{Жиры} \\ \text{Углеводы} \\ \text{Калории} \\ \text{Витамин D}
\end{array}
\begin{bmatrix}
\\ \\ \text{Количество на 100г} \\ W \in \mathbb{R}^{n \times p} \\ \\
\end{bmatrix}
$$

$c \in \mathbb{R}^p$, цена за 100г

$r \in \mathbb{R}^n$, ограничения

$x \in \mathbb{R}^p$, количество продуктов

$$
\min_{x \in \mathbb{R}^p} c^T x
$$

$$
Wx \succeq r
$$

$$
x \succeq 0
$$

Представьте, что вам нужно составить план диеты из некоторых продуктов: бананы, пироги, курица, яйца, рыба. Каждый из продуктов имеет свой вектор питательных веществ. Таким образом, все питательные вещества можно представить в виде матрицы W.

Пример: задача о диете

🍌 🍰 🍗 🥚 🐟

$$
\begin{array}{l}
\text{Белки} \\
\text{Жиры} \\
\text{Углеводы} \\
\text{Калории} \\
\text{Витамин D}
\end{array}
\left[
\begin{array}{c}
\\
\\
\text{Количество на 100г} \\
W \in \mathbb{R}^{n \times p} \\
\\
\end{array}
\right]
$$

$c \in \mathbb{R}^p$, цена за 100г

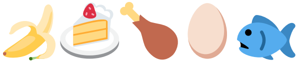
$r \in \mathbb{R}^n$, ограничения

$x \in \mathbb{R}^p$, количество продуктов

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathbb{R}^p} c^T x \\
&Wx \succeq r \\
&x \succeq 0
\end{aligned}
$$

Представьте, что вам нужно составить план диеты из некоторых продуктов: бананы, пироги, курица, яйца, рыба. Каждый из продуктов имеет свой вектор питательных веществ. Таким образом, все питательные вещества можно представить в виде матрицы W. Предположим, что у нас есть вектор требований для каждого питательного вещества $r \in \mathbb{R}^n$. Нам нужно найти самую дешёвую диету, которая удовлетворяет всем требованиям:

Пример: задача о диете



Белки	
Жиры	
Углеводы	Количество на 100г $W \in \mathbb{R}^{n \times p}$
Калории	
Витамин D	

$c \in \mathbb{R}^p$, цена за 100г

$r \in \mathbb{R}^n$, ограничения

$x \in \mathbb{R}^p$, количество продуктов

$$
\begin{aligned}
\min_{x \in \mathbb{R}^p} c^T x \\
Wx \succeq r \\
x \succeq 0
\end{aligned}
$$

Представьте, что вам нужно составить план диеты из некоторых продуктов: бананы, пироги, курица, яйца, рыба. Каждый из продуктов имеет свой вектор питательных веществ. Таким образом, все питательные вещества можно представить в виде матрицы W. Предположим, что у нас есть вектор требований для каждого питательного вещества $r \in \mathbb{R}^n$. Нам нужно найти самую дешёвую диету, которая удовлетворяет всем требованиям:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathbb{R}^p} c^\top x \\
\text{s.t. } & Wx \succeq r \\
& x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, p
\end{aligned}
$$

Open In Colab

Минимизация выпуклой функции как задача линейного программирования

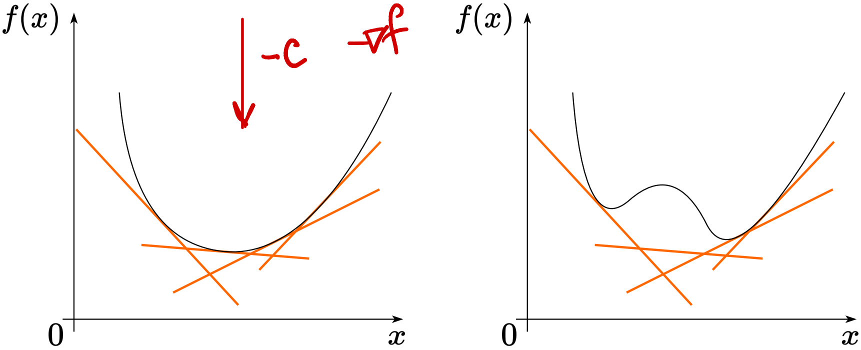


Рис. 1: Как задача линейного программирования может помочь с общей задачей выпуклой оптимизации

- Функция выпукла, если она может быть представлена как поточечный максимум линейных функций.

Минимизация выпуклой функции как задача линейного программирования

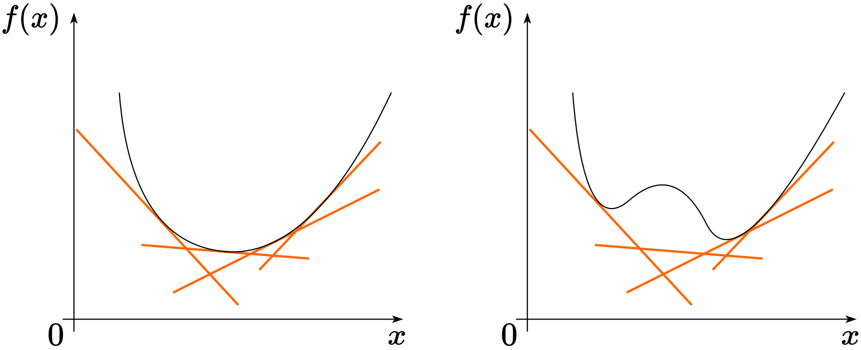


Рис. 1: Как задача линейного программирования может помочь с общей задачей выпуклой оптимизации

- Функция выпукла, если она может быть представлена как поточечный максимум линейных функций.
- В пространствах большой размерности аппроксимация может потребовать огромного количества функций.

Минимизация выпуклой функции как задача линейного программирования

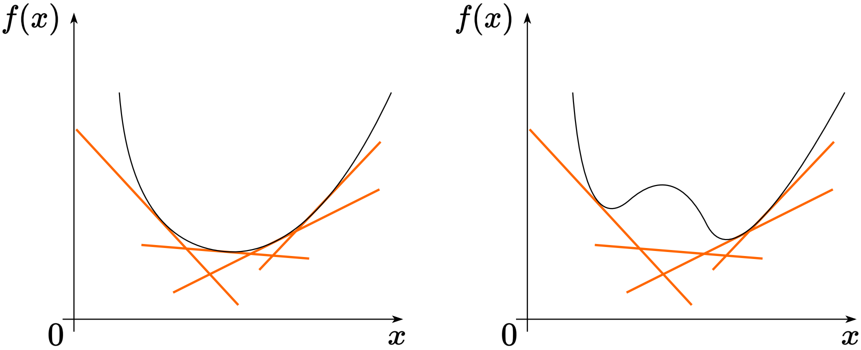


Рис. 1: Как задача линейного программирования может помочь с общей задачей выпуклой оптимизации

- Функция выпукла, если она может быть представлена как поточечный максимум линейных функций.
- В пространствах большой размерности аппроксимация может потребовать огромного количества функций.
- Существуют более эффективные солверы для выпуклой оптимизации (не сводящиеся к LP).

Пример: Транспортная задача

Типичная транспортная задача заключается в распределении товара от производителей к потребителям. Цель состоит в минимизации общих затрат на транспортировку при соблюдении ограничений на количество товара на каждом источнике и удовлетворении требований к спросу на каждом пункте назначения.

Рис. 2: Карта Западной Европы. Open In Colab

Пример: Транспортная задача

Пункт назначения / Источник	Арнем [€/тонна]	Гауда [€/тонна]	Спрос [тонн]
Лондон	n/a 100500	2.5	125
Берлин	2.5	n/a 100500	175
Маастрихт	1.6	2.0	225
Амстердам	1.4	1.0	250
Утрехт	0.8	1.0	225
Гаага	1.4	0.8	200
Макс. производство [тонн]	550	700	

Минимизировать: $\text{Стоимость} = \sum_{c \in \text{Пункты назначения}} \sum_{s \in \text{Источники}} T[c, s] x[c, s]$

ПЛАН ПЕРЕВОЗОК

Пример: Транспортная задача

Пункт назначения / Источник	Арнем [€/тонна]	Гауда [€/тонна]	Спрос [тонн]
Лондон	n/a	2.5	125
Берлин	2.5	n/a	175
Маастрихт	1.6	2.0	225
Амстердам	1.4	1.0	250
Утрехт	0.8	1.0	225
Гаага	1.4	0.8	200
Макс. производство [тонн]	550	700	

$$\text{Минимизировать:} \quad \text{Стоимость} = \sum_{c \in \text{Пункты назначения}} \sum_{s \in \text{Источники}} T[c,s]x[c,s]$$

$$\sum_{c \in \text{Пункты назначения}} x[c,s] \leq \text{Поставка}[s] \qquad \forall s \in \text{Источники}$$

Пример: Транспортная задача

Пункт назначения / Источник	Арнем [€/тонна]	Гауда [€/тонна]	Спрос [тонн]
Лондон	n/a	2.5	125
Берлин	2.5	n/a	175
Маастрихт	1.6	2.0	225
Амстердам	1.4	1.0	250
Утрехт	0.8	1.0	225
Гаага	1.4	0.8	200
Макс. производство [тонн]	550	700	

Минимизировать: $$\text{Стоимость} = \sum_{c \in \text{Пункты назначения}} \sum_{s \in \text{Источники}} T[c,s]x[c,s]$$

$$\sum_{c \in \text{Пункты назначения}} x[c,s] \leq \text{Поставка}[s] \qquad \forall s \in \text{Источники}$$

$$\sum_{s \in \text{Источники}} x[c,s] = \text{Спрос}[c] \qquad \forall c \in \text{Пункты назначения}$$

Задачу можно представить в виде следующего графа:

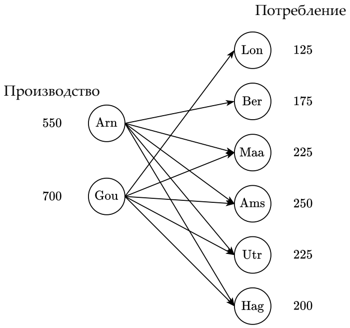


Рис. 3: Граф, связанный с задачей

Как получить задачу линейного программирования?

Основные преобразования

- Максимум-минимум

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\
&\text{s.t. } Ax \le b
\end{aligned}
\quad \leftrightarrow \quad
\begin{aligned}
&\max_{x \in \mathbb{R}^n} -c^\top x \\
&\text{s.t. } Ax \le b
\end{aligned}
$$

Основные преобразования

- Максимум-минимум

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\
\text{s.t. } &Ax \leq b
\end{aligned}
\quad \leftrightarrow \quad
\begin{aligned}
&\max_{x \in \mathbb{R}^n} -c^\top x \\
\text{s.t. } &Ax \leq b
\end{aligned}
$$

- Равенство к неравенству

$$
Ax = b \leftrightarrow \begin{cases} Ax \leq b \\ Ax \geq b \end{cases}
$$

Основные преобразования

- Максимум-минимум

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\ \text{s.t. } &Ax \leq b \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{aligned} &\max_{x \in \mathbb{R}^n} -c^\top x \\ \text{s.t. } &Ax \leq b \end{aligned}$$

- Равенство к неравенству

$$Ax = b \leftrightarrow \begin{cases} Ax \leq b \\ Ax \geq b \end{cases}$$

- Неравенство к равенству, увеличивая размерность задачи на m.

$$\boxed{Ax \leq b \leftrightarrow \begin{cases} Ax + z = b \\ z \geq 0 \end{cases}}$$

$x \in \mathbb{R}^n$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$x \in \mathbb{R}^n$

$z \in \mathbb{R}^m$

Основные преобразования

- Максимум-минимум

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} & \; c^\top x \\ \text{s.t.} & \; Ax \le b \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{aligned} \max_{x\in\mathbb{R}^n} & \; -c^\top x \\ \text{s.t.} & \; Ax \le b \end{aligned}$$

- Равенство к неравенству

$$Ax = b \leftrightarrow \begin{cases} Ax \le b \\ Ax \ge b \end{cases}$$

$2n+m$

- Неравенство к равенству, увеличивая размерность задачи на m.

n

$$Ax \le b \leftrightarrow \begin{cases} Ax + z = b \\ z \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A(x^+ - x^-) + z = b \\ z \ge 0 \quad x^+ \ge 0, \; x^- \ge 0 \end{cases}$$

- Неотрицательные переменные

$$x \leftrightarrow \begin{cases} x = x_+ - x_- \\ x_+ \ge 0 \\ x_- \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Пример: задача аппроксимации Чебышева

$\|x\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$

$$\boxed{\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_\infty \leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_i |a_i^T x - b_i|}$$

Можно записать эквивалентную задачу линейного программирования с заменой максимальной координаты вектора:

$|v_i| = t$

Пример: задача аппроксимации Чебышева

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$\left(a_i^T x - b_i\right)_{i \in 1, \dots m}$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_\infty \leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_i |a_i^T x - b_i| = t$$

Можно записать эквивалентную задачу линейного программирования с заменой максимальной координаты вектора:

$-t \le a_i^T x - b_i \le t$

$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\min_{t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n} t \\ \text{s.t. } &a_i^T x - b_i \le t, \; i = 1, \dots, m \\ &-a_i^T x + b_i \le t, \; i = 1, \dots, m \end{aligned}}$$

$\begin{pmatrix} a_i \\ -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \le b_i$

$\begin{pmatrix} -a_i \\ -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \le -b_i$

Пример: задача ℓ_1 аппроксимации

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_1 \leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} |a_i^T x - b_i|$$

Можно записать эквивалентную задачу линейного программирования с заменой суммы координат вектора:

$$-t_i \leq a_i^T x - b_i \leq t_i$$

$$|a_i^T x - b_i| = t_i$$

Пример: задача ℓ_1 аппроксимации

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_1 \leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m |a_i^T x - b_i|$$

пер.: n

огр.: 0

Можно записать эквивалентную задачу линейного программирования с заменой суммы координат вектора:

$$\boxed{\min_{t \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n} \mathbf{1}^T t}$$

$$\text{s.t. } a_i^T x - b_i \leq t_i, \; i = 1, \ldots, m$$

$$-a_i^T x + b_i \leq t_i, \; i = 1, \ldots, m$$

переменных : $m+n$

огр. : $2m$

Задача смешивания: от нелинейных ограничений к ЛП [1]

$x_{TARGET} = 2л$

Производственное предприятие получает заказ на 100 литров раствора с определённой концентрацией (например, 4% сахарного раствора). На складе есть:

10л

Компонент	Сахар (%) a	Стоимость ($/л) c	
Концентрат A (Добрый кола)	10.6	1.25	x_1
Концентрат B (Север кола)	4.5	1.02	x_2
Вода (Псыж)	0.0	0.62	x_3

$$c^T x \to \min_{x \in \mathbb{R}^3}$$

$$x \geq 0$$

$$1^T x = x_{TARGET}$$

Цель: Найти смесь с минимальной стоимостью, которая удовлетворит заказ.

$$\frac{x_1 \cdot a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3}{x_1 + x_2 + x_3} = a_{TARGET}$$

Целевая функция

$$\boxed{\frac{a^T x}{1^T x} = a_{TARGET}} \Rightarrow a^T x = a_T 1^T x$$

$$(a^T - a_T \cdot 1)x = 0$$

Задача смешивания: от нелинейных ограничений к ЛП [1]

Производственное предприятие получает заказ на 100 литров раствора с определённой концентрацией (например, 4% сахарного раствора). На складе есть:

Компонент	Сахар (%)	Стоимость ($/л)
Концентрат A (Добрый кола)	10.6	1.25
Концентрат B (Север кола)	4.5	1.02
Вода (Псыж)	0.0	0.62

Цель: Найти смесь с минимальной стоимостью, которая удовлетворит заказ.

Целевая функция

Минимизировать стоимость:

$$\text{Cost} = \sum_{c \in C} x_c P_c$$

где x_c — объём используемого компонента c, и P_c — его цена.

Задача смешивания: от нелинейных ограничений к ЛП [1]

Производственное предприятие получает заказ на 100 литров раствора с определённой концентрацией (например, 4% сахарного раствора). На складе есть:

Компонент	Сахар (%)	Стоимость ($/л)
Концентрат A (Добрый кола)	10.6	1.25
Концентрат B (Север кола)	4.5	1.02
Вода (Псыж)	0.0	0.62

Цель: Найти смесь с минимальной стоимостью, которая удовлетворит заказ.

Целевая функция

Минимизировать стоимость:

$$\text{Cost} = \sum_{c \in C} x_c P_c$$

где x_c — объём используемого компонента c, и P_c — его цена.

Ограничение на объём

Задача смешивания: от нелинейных ограничений к ЛП [1]

Производственное предприятие получает заказ на 100 литров раствора с определённой концентрацией (например, 4% сахарного раствора). На складе есть:

Компонент	Сахар (%)	Стоимость ($/л)
Концентрат A (Добрый кола)	10.6	1.25
Концентрат B (Север кола)	4.5	1.02
Вода (Псыж)	0.0	0.62

Цель: Найти смесь с минимальной стоимостью, которая удовлетворит заказ.

Целевая функция

Минимизировать стоимость:

$$\text{Cost} = \sum_{c \in C} x_c P_c$$

где x_c — объём используемого компонента c, и P_c — его цена.

Ограничение на объём

Убедитесь, что общий объём V:

$$V = \sum_{c \in C} x_c$$

Ограничение на состав

Задача смешивания: от нелинейных ограничений к ЛП [1]

Производственное предприятие получает заказ на 100 литров раствора с определённой концентрацией (например, 4% сахарного раствора). На складе есть:

Компонент	Сахар (%)	Стоимость ($/л)
Концентрат A (Добрый кола)	10.6	1.25
Концентрат B (Север кола)	4.5	1.02
Вода (Псыж)	0.0	0.62

Цель: Найти смесь с минимальной стоимостью, которая удовлетворит заказ.

Целевая функция

Минимизировать стоимость:

$$
\text{Cost} = \sum_{c \in C} x_c P_c
$$

где x_c — объём используемого компонента c, и P_c — его цена.

Ограничение на объём

Убедитесь, что общий объём V:

$$
V = \sum_{c \in C} x_c
$$

Ограничение на состав

Убедитесь, что содержание сахара — 4%:

$$
\bar{A} = \frac{\sum_{c \in C} x_c A_c}{\sum_{c \in C} x_c}
$$

[1] Source

Задача смешивания: от нелинейных ограничений к ЛП [1]

Производственное предприятие получает заказ на 100 литров раствора с определённой концентрацией (например, 4% сахарного раствора). На складе есть:

Компонент	Сахар (%)	Стоимость ($/л)
Концентрат A (Добрый кола)	10.6	1.25
Концентрат B (Север кола)	4.5	1.02
Вода (Псыж)	0.0	0.62

Цель: Найти смесь с минимальной стоимостью, которая удовлетворит заказ.

Целевая функция

Минимизировать стоимость:

$$
\text{Cost} = \sum_{c \in C} x_c P_c
$$

где x_c — объём используемого компонента c, и P_c — его цена.

Ограничение на объём

Убедитесь, что общий объём V:

$$
V = \sum_{c \in C} x_c
$$

Ограничение на состав

Убедитесь, что содержание сахара — 4%:

$$
\bar{A} = \frac{\sum_{c \in C} x_c A_c}{\sum_{c \in C} x_c}
$$

Линеаризованная версия:

$$
0 = \sum_{c \in C} x_c (A_c - \bar{A})
$$

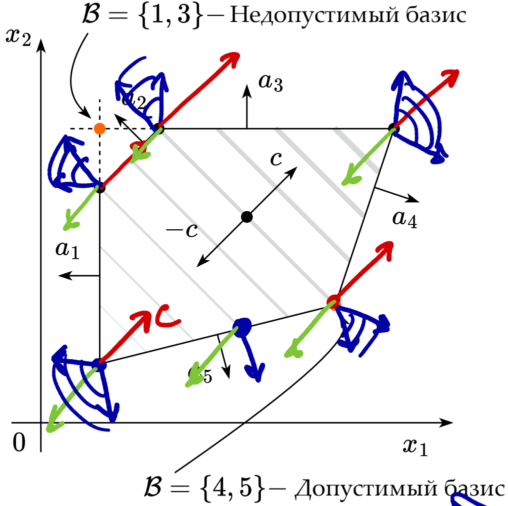
Это можно решить с помощью линейного программирования.

Код

1 Source

Симплекс-метод

Геометрия симплекс-метода

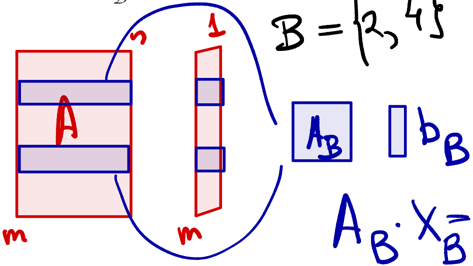


Рассмотрим следующую простую формулировку задачи линейного программирования:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\
\text{s.t. } & Ax \leq b
\end{aligned}
\tag{LP.Inequality}
$$

- Определение: **базис** $\mathcal{B}$ — это подмножество n (целых) чисел между 1 и m, такое что $\text{rank} A_{\mathcal{B}} = n$.

$B = \{2, 4\}$ n штук

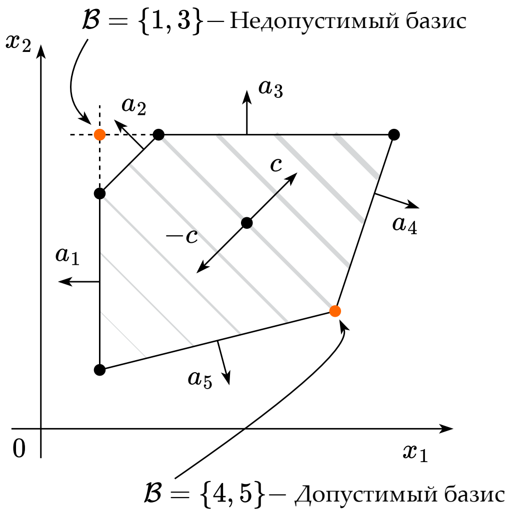


$m = 5 \quad n = 2$

$A_B \cdot x_B = b_B$

$x_B = A_B^{-1} \cdot b_B$

Геометрия симплекс-метода

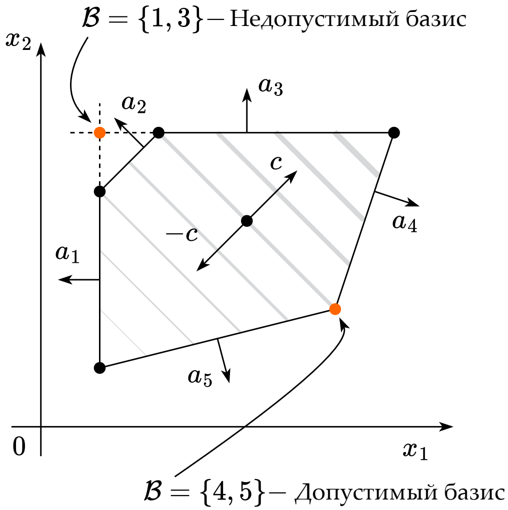


Рассмотрим следующую простую формулировку задачи линейного программирования:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\
\text{s.t. } & Ax \leq b
\end{aligned}
\tag{LP.Inequality}
$$

- Определение: **базис** $\mathcal{B}$ — это подмножество n (целых) чисел между 1 и m, такое что $\text{rank} A_{\mathcal{B}} = n$.
- Обратите внимание, что мы можем связать подматрицу $A_{\mathcal{B}}$ и соответствующую правую часть $b_{\mathcal{B}}$ с базисом $\mathcal{B}$.

Геометрия симплекс-метода

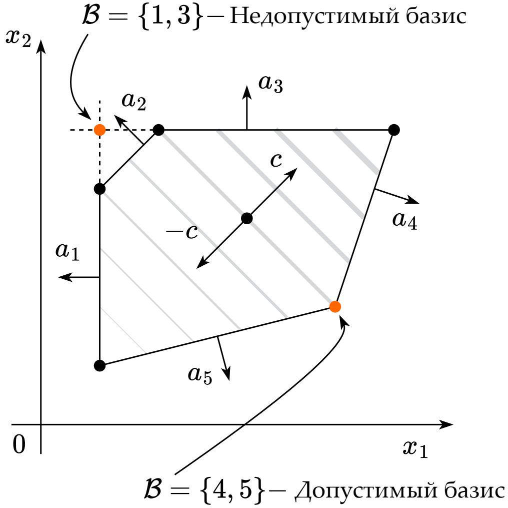


Рассмотрим следующую простую формулировку задачи линейного программирования:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\
\text{s.t. } & Ax \leq b
\end{aligned}
\tag{LP.Inequality}
$$

- Определение: **базис** $\mathcal{B}$ — это подмножество n (целых) чисел между 1 и m, такое что $\text{rank} A_{\mathcal{B}} = n$.
- Обратите внимание, что мы можем связать подматрицу $A_{\mathcal{B}}$ и соответствующую правую часть $b_{\mathcal{B}}$ с базисом $\mathcal{B}$.
- Также мы можем получить точку пересечения всех этих гиперплоскостей из базиса: $\boxed{x_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}^{-1} b_{\mathcal{B}}.}$

Геометрия симплекс-метода



Рассмотрим следующую простую формулировку задачи линейного программирования:

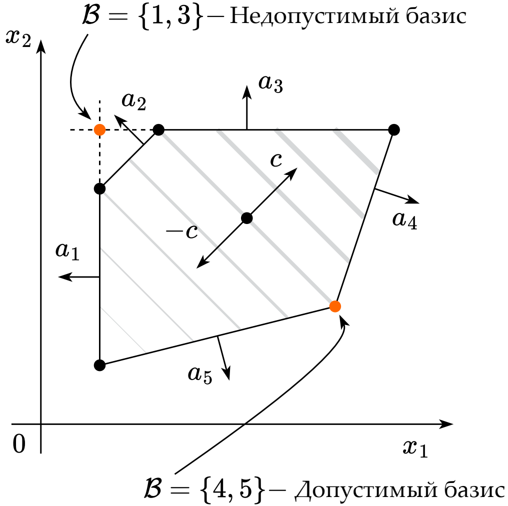
$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\
\text{s.t. } & Ax \leq b
\end{aligned}
\tag{LP.Inequality}
$$

- Определение: **базис** $\mathcal{B}$ — это подмножество n (целых) чисел между 1 и m, такое что $\text{rank} A_{\mathcal{B}} = n$.
- Обратите внимание, что мы можем связать подматрицу $A_{\mathcal{B}}$ и соответствующую правую часть $b_{\mathcal{B}}$ с базисом $\mathcal{B}$.
- Также мы можем получить точку пересечения всех этих гиперплоскостей из базиса: $x_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}^{-1} b_{\mathcal{B}}$.
- Если $\boxed{A x_{\mathcal{B}} \leq b}$, то базис $\mathcal{B}$ является **допустимым**.

$$\boxed{\underset{5\times 2}{A} \cdot \underbrace{A_B^{-1} b_B}_{x_B} \leq \underset{5\times 1}{b}}$$

2x1

Геометрия симплекс-метода

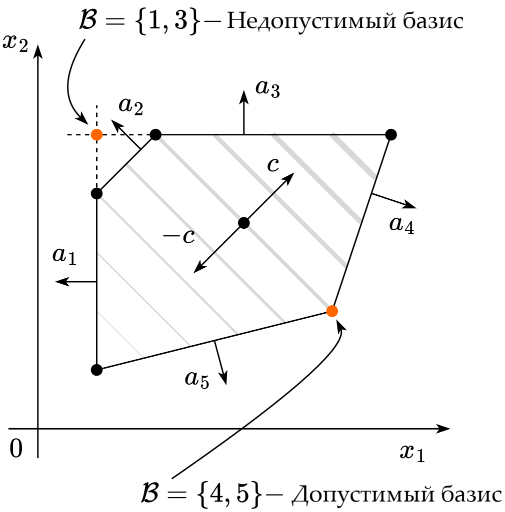


Рассмотрим следующую простую формулировку задачи линейного программирования:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\
&\text{s.t. } Ax \leq b
\end{aligned}
\tag{LP.Inequality}
$$

- Определение: **базис** $\mathcal{B}$ — это подмножество n (целых) чисел между 1 и m, такое что $\text{rank} A_{\mathcal{B}} = n$.
- Обратите внимание, что мы можем связать подматрицу $A_{\mathcal{B}}$ и соответствующую правую часть $b_{\mathcal{B}}$ с базисом $\mathcal{B}$.
- Также мы можем получить точку пересечения всех этих гиперплоскостей из базиса: $x_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}^{-1} b_{\mathcal{B}}$.
- Если $Ax_{\mathcal{B}} \leq b$, то базис $\mathcal{B}$ является **допустимым**.
- Базис $\mathcal{B}$ оптимален, если $x_{\mathcal{B}}$ является решением задачи LP.Inequality.

Геометрия симплекс-метода

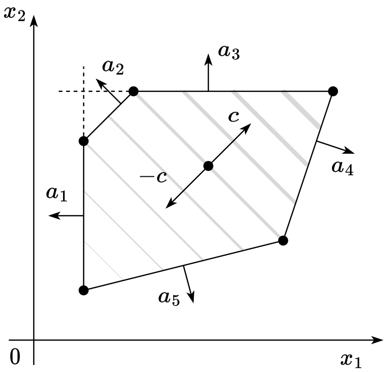


Рассмотрим следующую простую формулировку задачи линейного программирования:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\
\text{s.t. } & Ax \leq b
\end{aligned}
\qquad \text{(LP.Inequality)}
$$

- Определение: **базис** $\mathcal{B}$ — это подмножество n (целых) чисел между 1 и m, такое что $\text{rank} A_{\mathcal{B}} = n$.
- Обратите внимание, что мы можем связать подматрицу $A_{\mathcal{B}}$ и соответствующую правую часть $b_{\mathcal{B}}$ с базисом $\mathcal{B}$.
- Также мы можем получить точку пересечения всех этих гиперплоскостей из базиса: $x_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}^{-1} b_{\mathcal{B}}$.
- Если $Ax_{\mathcal{B}} \leq b$, то базис $\mathcal{B}$ является **допустимым**.
- Базис $\mathcal{B}$ оптимален, если $x_{\mathcal{B}}$ является решением задачи LP.Inequality.
- $x_{\mathcal{B}}$ называют **базисной точкой** или базисным решением (иногда её тоже называют **базисом**).

Если решение задачи линейного программирования существует, то оно лежит в вершине

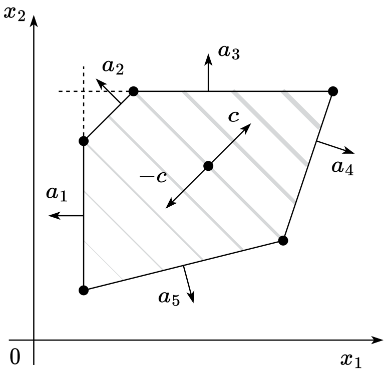


Theorem

1. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет непустое бюджетное множество, то существует по крайней мере одна допустимая базисная точка.

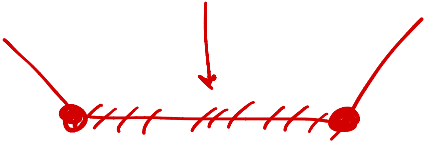
Верхнеуровневая идея симплекс-метода:

Если решение задачи линейного программирования существует, то оно лежит в вершине



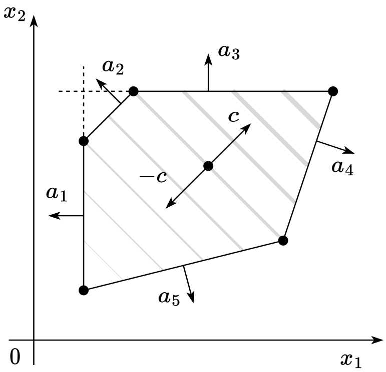
Theorem

1. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет непустое бюджетное множество, то существует по крайней мере одна допустимая базисная точка.
2. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет решения, то по крайней мере одно из таких решений является оптимальной базисной точкой.



Верхнеуровневая идея симплекс-метода:

Если решение задачи линейного программирования существует, то оно лежит в вершине

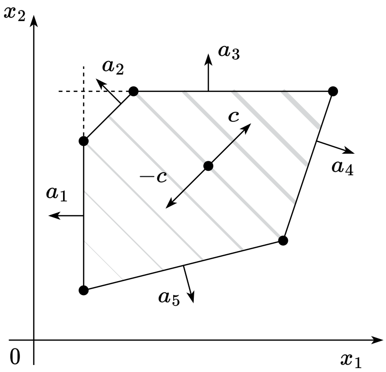


Theorem

1. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет непустое бюджетное множество, то существует по крайней мере одна допустимая базисная точка.
2. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет решения, то по крайней мере одно из таких решений является оптимальной базисной точкой.
3. Если задача линейного программирования в стандартной форме допустима и ограничена, то она имеет оптимальное решение.

Верхнеуровневая идея симплекс-метода:

Если решение задачи линейного программирования существует, то оно лежит в вершине

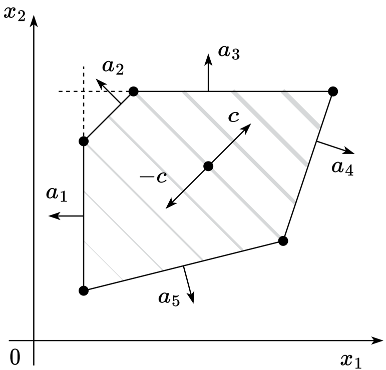


Theorem

1. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет непустое бюджетное множество, то существует по крайней мере одна допустимая базисная точка.
2. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет решения, то по крайней мере одно из таких решений является оптимальной базисной точкой.
3. Если задача линейного программирования в стандартной форме допустима и ограничена, то она имеет оптимальное решение.

Верхнеуровневая идея симплекс-метода:

Если решение задачи линейного программирования существует, то оно лежит в вершине



Theorem

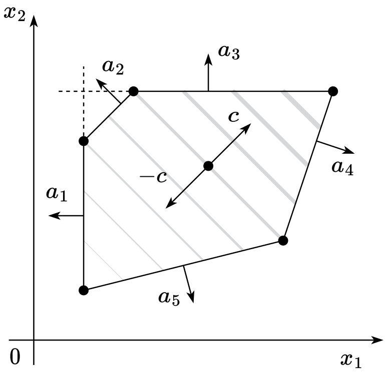
1. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет непустое бюджетное множество, то существует по крайней мере одна допустимая базисная точка.
2. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет решения, то по крайней мере одно из таких решений является оптимальной базисной точкой.
3. Если задача линейного программирования в стандартной форме допустима и ограничена, то она имеет оптимальное решение.

Для доказательства см. теорему 13.2 в Numerical Optimization by Jorge Nocedal and Stephen J. Wright

Верхнеуровневая идея симплекс-метода:

- Убедитесь, что вы находитесь в вершине.

Если решение задачи линейного программирования существует, то оно лежит в вершине



Theorem

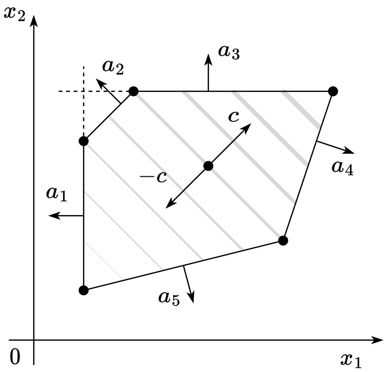
1. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет непустое бюджетное множество, то существует по крайней мере одна допустимая базисная точка.
2. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет решения, то по крайней мере одно из таких решений является оптимальной базисной точкой.
3. Если задача линейного программирования в стандартной форме допустима и ограничена, то она имеет оптимальное решение.

Для доказательства см. теорему 13.2 в Numerical Optimization by Jorge Nocedal and Stephen J. Wright

Верхнеуровневая идея симплекс-метода:

- Убедитесь, что вы находитесь в вершине. HARD
- Проверьте оптимальность. EASY

Если решение задачи линейного программирования существует, то оно лежит в вершине



Theorem

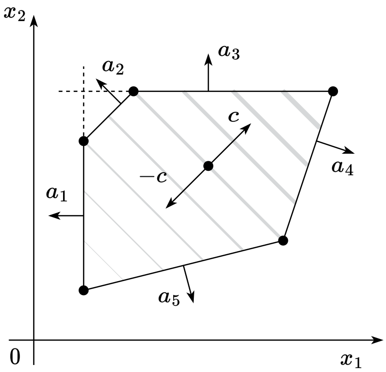
1. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет непустое бюджетное множество, то существует по крайней мере одна допустимая базисная точка.
2. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет решения, то по крайней мере одно из таких решений является оптимальной базисной точкой.
3. Если задача линейного программирования в стандартной форме допустима и ограничена, то она имеет оптимальное решение.

Для доказательства см. теорему 13.2 в Numerical Optimization by Jorge Nocedal and Stephen J. Wright

Верхнеуровневая идея симплекс-метода:

- Убедитесь, что вы находитесь в вершине.
- Проверьте оптимальность.
- Если необходимо, перейдите к другой вершине (измените базис). HARD

Если решение задачи линейного программирования существует, то оно лежит в вершине



Theorem

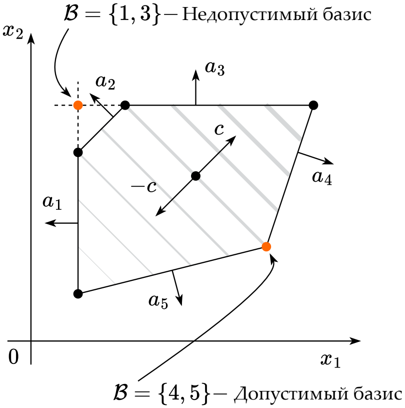
1. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет непустое бюджетное множество, то существует по крайней мере одна допустимая базисная точка.
2. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет решения, то по крайней мере одно из таких решений является оптимальной базисной точкой.
3. Если задача линейного программирования в стандартной форме допустима и ограничена, то она имеет оптимальное решение.

Для доказательства см. теорему 13.2 в Numerical Optimization by Jorge Nocedal and Stephen J. Wright

Верхнеуровневая идея симплекс-метода:

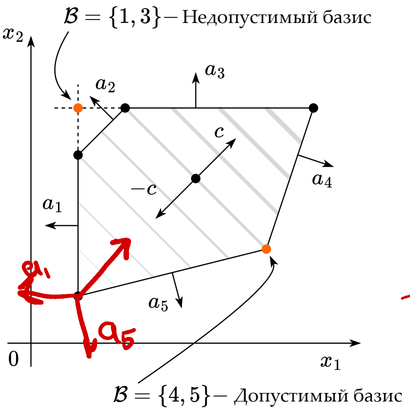
- Убедитесь, что вы находитесь в вершине.
- Проверьте оптимальность.
- Если необходимо, перейдите к другой вершине (измените базис).
- Повторяйте, пока не сойдётесь.

Оптимальный базис



Оптимальный базис

ПРОВЕРКА ОПТИМАЛЬНОСТИ



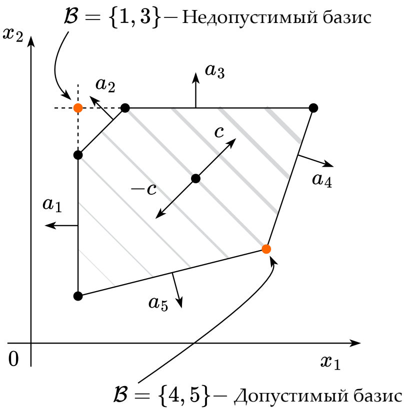
Поскольку у нас есть базис, мы можем разложить наш целевой вектор c в этом базисе и найти скалярные коэффициенты $\lambda_{\mathcal{B}}$:

$$\boxed{\lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} = c^T} \leftrightarrow \lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$$

B

$x_B = A_B^{-1} b_B$

Оптимальный базис



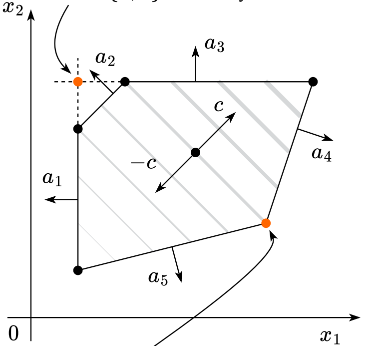
Поскольку у нас есть базис, мы можем разложить наш целевой вектор c в этом базисе и найти скалярные коэффициенты $\lambda_{\mathcal{B}}$:

$$\lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} = c^T \leftrightarrow \lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$$

Theorem

Если все компоненты $\lambda_{\mathcal{B}}$ неположительны и $\mathcal{B}$ допустим, то $\mathcal{B}$ оптимален.

Оптимальный базис



Поскольку у нас есть базис, мы можем разложить наш целевой вектор c в этом базисе и найти скалярные коэффициенты $\lambda_\mathcal{B}$:

$$\lambda_\mathcal{B}^T A_\mathcal{B} = c^T \leftrightarrow \lambda_\mathcal{B}^T = c^T A_\mathcal{B}^{-1}$$

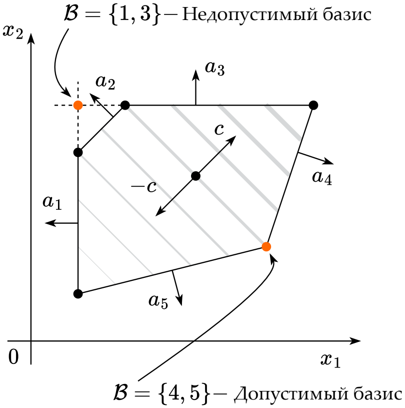
Theorem

Если все компоненты $\lambda_\mathcal{B}$ неположительны и $\mathcal{B}$ допустим, то $\mathcal{B}$ оптимален.

Доказательство Предположим противное, то есть $\boxed{\lambda_\mathcal{B} \leq 0 \text{ и } \mathcal{B}}$ допустим, но x_B не оптимален.

$$\exists x^* : \boxed{Ax^* \leq b}, c^T x^* < c^T x_\mathcal{B}$$

Оптимальный базис



Поскольку у нас есть базис, мы можем разложить наш целевой вектор c в этом базисе и найти скалярные коэффициенты $\lambda_{\mathcal{B}}$:

$$\lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} = c^T \leftrightarrow \lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$$

Theorem

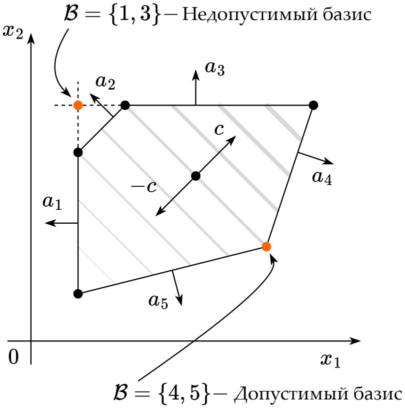
Если все компоненты $\lambda_{\mathcal{B}}$ неположительны и $\mathcal{B}$ допустим, то $\mathcal{B}$ оптимален.

Доказательство Предположим противное, то есть $\lambda_{\mathcal{B}} \leq 0$ и $\mathcal{B}$ допустим, но не оптимален.

$$\exists x^* : Ax^* \leq b, c^T x^* < c^T x_{\mathcal{B}}$$

$$A_{\mathcal{B}} x^* \leq b_{\mathcal{B}}$$

Оптимальный базис



Поскольку у нас есть базис, мы можем разложить наш целевой вектор c в этом базисе и найти скалярные коэффициенты $\lambda_{\mathcal{B}}$:

$$\lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} = c^T \leftrightarrow \lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$$

Theorem

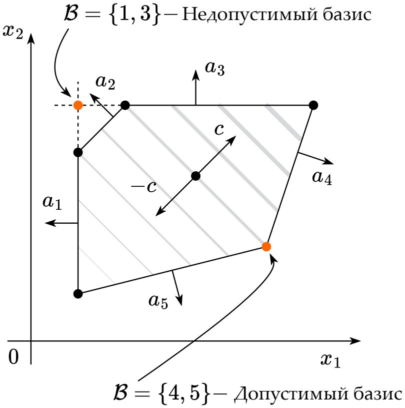
Если все компоненты $\lambda_{\mathcal{B}}$ неположительны и $\mathcal{B}$ допустим, то $\mathcal{B}$ оптимален.

Доказательство Предположим противное, то есть $\lambda_{\mathcal{B}} \leq 0$ и $\mathcal{B}$ допустим, но не оптимален.

$$\exists x^* : Ax^* \leq b, c^T x^* < c^T x_{\mathcal{B}}$$

$$A_{\mathcal{B}} x^* \leq b_{\mathcal{B}} \mid \lambda_{\mathcal{B}}^T \cdot \leq 0$$

Оптимальный базис



Поскольку у нас есть базис, мы можем разложить наш целевой вектор c в этом базисе и найти скалярные коэффициенты $\lambda_\mathcal{B}$:

$$
\underbrace{\lambda_\mathcal{B}^T A_\mathcal{B} = c^T} \leftrightarrow \lambda_\mathcal{B}^T = c^T A_\mathcal{B}^{-1}
$$

Theorem

Если все компоненты $\lambda_\mathcal{B}$ неположительны и $\mathcal{B}$ допустим, то $\mathcal{B}$ оптимален.

Доказательство Предположим противное, то есть $\lambda_\mathcal{B} \le 0$ и $\mathcal{B}$ допустим, но не оптимален.

$$
\exists x^* : Ax^* \le b, \boxed{c^T x^* < c^T x_\mathcal{B}}
$$

$$
A_\mathcal{B} x^* \le b_\mathcal{B} \mid \lambda_\mathcal{B}^T \cdot \le 0
$$

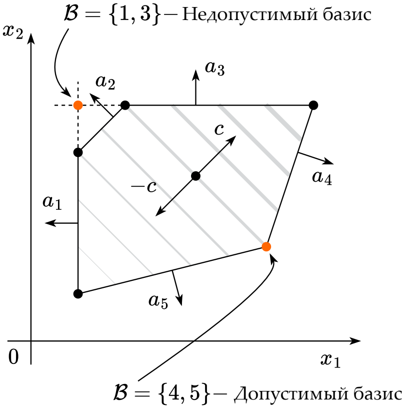
$$
\underbrace{\lambda_\mathcal{B}^T A_\mathcal{B}}_{c^T} x^* \ge \lambda_\mathcal{B}^T b_\mathcal{B}
$$

противор

$$
\boxed{c^T x^* \ge \lambda_B^T A_B x_B}
$$

$$
\boxed{c^T x^* \ge c^T x_B}
$$

Оптимальный базис



Поскольку у нас есть базис, мы можем разложить наш целевой вектор c в этом базисе и найти скалярные коэффициенты $\lambda_{\mathcal{B}}$:

$$\lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} = c^T \leftrightarrow \lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$$

Theorem

Если все компоненты $\lambda_{\mathcal{B}}$ неположительны и $\mathcal{B}$ допустим, то $\mathcal{B}$ оптимален.

Доказательство Предположим противное, то есть $\lambda_{\mathcal{B}} \leq 0$ и $\mathcal{B}$ допустим, но не оптимален.

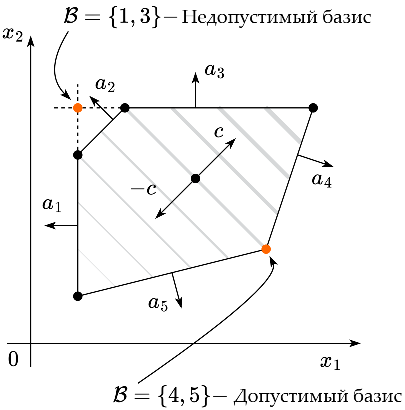
$$\exists x^* : Ax^* \leq b, c^T x^* < c^T x_{\mathcal{B}}$$

$$A_{\mathcal{B}} x^* \leq b_{\mathcal{B}} \mid \lambda_{\mathcal{B}}^T \cdot \leq 0$$

$$\lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} x^* \geq \lambda_{\mathcal{B}}^T b_{\mathcal{B}}$$

$$c^T x^* \geq \lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} x_{\mathcal{B}}$$

Оптимальный базис



Поскольку у нас есть базис, мы можем разложить наш целевой вектор c в этом базисе и найти скалярные коэффициенты $\lambda_{\mathcal{B}}$:

$$\lambda^T_{\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}} = c^T \leftrightarrow \lambda^T_{\mathcal{B}} = c^T A^{-1}_{\mathcal{B}}$$

Theorem

Если все компоненты $\lambda_{\mathcal{B}}$ неположительны и $\mathcal{B}$ допустим, то $\mathcal{B}$ оптимален.

Доказательство Предположим противное, то есть $\lambda_{\mathcal{B}} \leq 0$ и $\mathcal{B}$ допустим, но не оптимален.

$$\exists x^* : Ax^* \leq b, c^T x^* < c^T x_{\mathcal{B}}$$

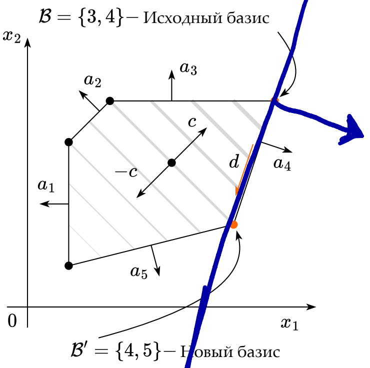
$$A_{\mathcal{B}} x^* \leq b_{\mathcal{B}} \mid \lambda^T_{\mathcal{B}} \cdot \leq 0$$

$$\lambda^T_{\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}} x^* \geq \lambda^T_{\mathcal{B}} b_{\mathcal{B}}$$

$$c^T x^* \geq \lambda^T_{\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}} x_{\mathcal{B}}$$

$$c^T x^* \geq c^T x_{\mathcal{B}}$$

Изменение базиса



Было X_B $B = \{3, 4\}$

$\lambda_B^3 > 0$

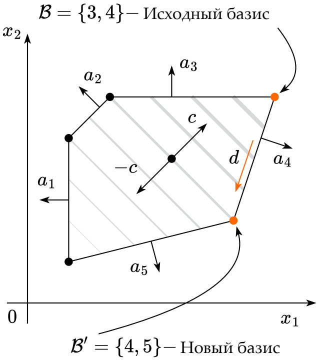
Стало B' $X_{B'}$ $B' = \{4, 5\}$

Хочу:

$$\boxed{X_{B'} = X_B + \mu \cdot d}$$

Предположим, что некоторые из коэффициентов $\lambda_{\mathcal{B}}$ положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

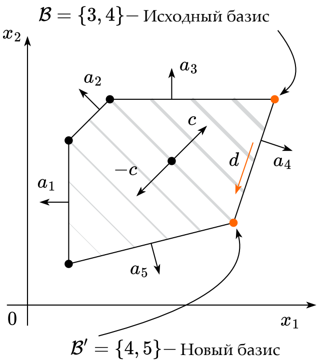
Изменение базиса



Предположим, что некоторые из коэффициентов $\lambda_{\mathcal{B}}$ положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

- Предположим, что у нас есть базис $\mathcal{B}$: $\lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$

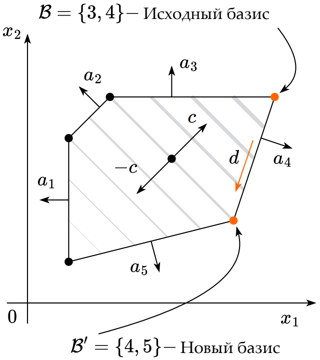
Изменение базиса



Предположим, что некоторые из коэффициентов $\lambda_{\mathcal{B}}$ положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

- Предположим, что у нас есть базис $\mathcal{B}$: $\lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$
- Предположим, что $\lambda_{\mathcal{B}}^k > 0$. Мы хотим удалить k из базиса и сформировать новый:

Изменение базиса

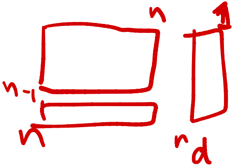


- Предположим, что у нас есть базис $\mathcal{B}$: $\lambda^T_{\mathcal{B}} = c^T A^{-1}_{\mathcal{B}}$
- Предположим, что $\lambda^k_{\mathcal{B}} > 0$. Мы хотим удалить k из базиса и сформировать новый:

$$\boxed{\begin{cases} A_{\mathcal{B}\setminus\{k\}} d = 0 \\ a_k^T d = -1 \end{cases}}$$

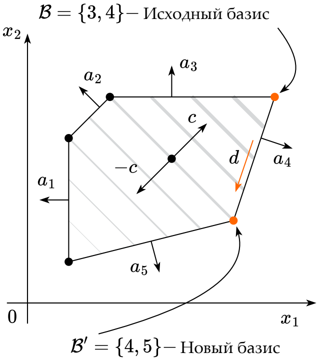
Я НЕ ТРОНУ ДРУГИЕ ОГРАН

ИДУ В НУЖНУЮ СТОРОНУ



Предположим, что некоторые из коэффициентов $\lambda_{\mathcal{B}}$ положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

Изменение базиса



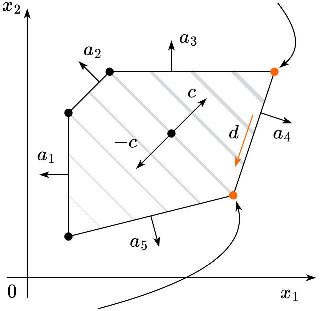
- Предположим, что у нас есть базис $\mathcal{B}$: $\lambda^T_{\mathcal{B}} = c^T A^{-1}_{\mathcal{B}}$
- Предположим, что $\lambda^k_{\mathcal{B}} > 0$. Мы хотим удалить k из базиса и сформировать новый:

$$\begin{cases} A_{\mathcal{B}\setminus\{k\}} d = 0 \\ a_k^T d = -1 \end{cases} \qquad c^T d$$

$$c^T x_{B'} = c^T x_B + \underbrace{\mu c^T d}_{\Delta f}$$

Предположим, что некоторые из коэффициентов $\lambda_{\mathcal{B}}$ положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

Изменение базиса



Предположим, что некоторые из коэффициентов $\lambda_{\mathcal{B}}$ положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

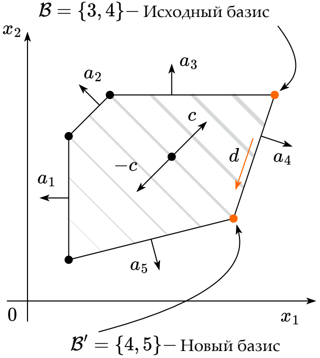
- Предположим, что у нас есть базис $\mathcal{B}$: $\lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$
- Предположим, что $\lambda_{\mathcal{B}}^k > 0$. Мы хотим удалить k из базиса и сформировать новый:

$$\begin{cases} A_{\mathcal{B}\setminus\{k\}} d = 0 \\ a_k^T d = -1 \end{cases} \qquad c^T d = \lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} d =$$

n- 1 n

$$c^T = \lambda_{B}^T A_B$$

Изменение базиса

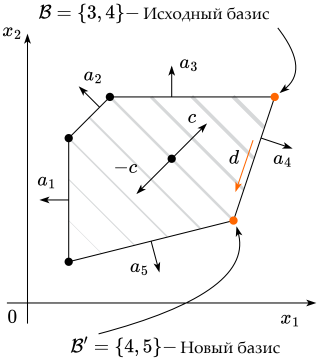


- Предположим, что у нас есть базис $\mathcal{B}$: $\lambda^T_{\mathcal{B}} = c^T A^{-1}_{\mathcal{B}}$
- Предположим, что $\lambda^k_{\mathcal{B}} > 0$. Мы хотим удалить k из базиса и сформировать новый:

$$
\begin{cases} A_{\mathcal{B} \setminus \{k\}} d = 0 \\ a_k^T d = -1 \end{cases} \qquad c^T d = \lambda^T_{\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}} d = \sum_{i=1}^n \lambda^i_{\mathcal{B}} (A_{\mathcal{B}} d)^i
$$

Предположим, что некоторые из коэффициентов $\lambda_{\mathcal{B}}$ положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

Изменение базиса



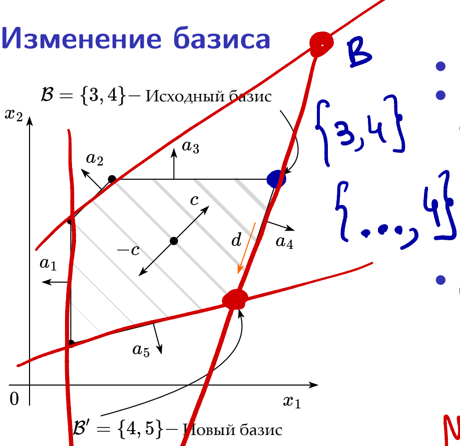
Предположим, что некоторые из коэффициентов $\lambda_{\mathcal{B}}$ положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

- Предположим, что у нас есть базис $\mathcal{B}$: $\lambda^T_{\mathcal{B}} = c^T A^{-1}_{\mathcal{B}}$
- Предположим, что $\lambda^k_{\mathcal{B}} > 0$. Мы хотим удалить k из базиса и сформировать новый:

$$
\begin{cases} A_{\mathcal{B}\setminus\{k\}} d = 0 \\ a_k^T d = -1 \end{cases}
\qquad
c^T d = \lambda^T_{\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}} d = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i_{\mathcal{B}} (A_{\mathcal{B}} d)^i = -\lambda^k_{\mathcal{B}} < 0
$$

$f \downarrow\downarrow$ больше

Изменение базиса



- Предположим, что у нас есть базис $\mathcal{B}$: $\lambda^T_{\mathcal{B}} = c^T A^{-1}_{\mathcal{B}}$
- Предположим, что $\lambda^k_{\mathcal{B}} > 0$. Мы хотим удалить k из базиса и сформировать новый:

$$\begin{cases} A_{\mathcal{B}\setminus\{k\}} d = 0 \\ a_k^T d = -1 \end{cases} \qquad c^T d = \lambda^T_{\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}} d = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i_{\mathcal{B}} (A_{\mathcal{B}} d)^i = -\lambda^k_{\mathcal{B}} < 0$$

- Для всех $j \notin \mathcal{B}$ рассчитаем размер шага проекции:

$$\boxed{\mu_j = \frac{b_j - a_j^T x_{\mathcal{B}}}{a_j^T d}}$$

$\mu_1 > 0$

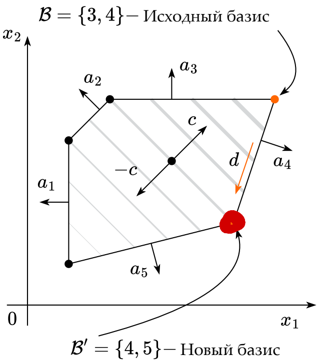
$\mu_2 < 0$

$\mu_5 > 0$

Предположим, что некоторые из коэффициентов $\lambda_{\mathcal{B}}$ положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

$\mu_1, \mu_2,$

Изменение базиса



Предположим, что некоторые из коэффициентов $\lambda_{\mathcal{B}}$ положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

- Предположим, что у нас есть базис $\mathcal{B}$: $\lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$
- Предположим, что $\lambda_{\mathcal{B}}^k > 0$. Мы хотим удалить k из базиса и сформировать новый:

$$\begin{cases} A_{\mathcal{B}\setminus\{k\}} d = 0 \\ a_k^T d = -1 \end{cases} \qquad c^T d = \lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} d = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\mathcal{B}}^i (A_{\mathcal{B}} d)^i = -\lambda_{\mathcal{B}}^k < 0$$

- Для всех $j \notin \mathcal{B}$ рассчитаем размер шага проекции:

$$\boxed{\mu_j = \frac{b_j - a_j^T x_{\mathcal{B}}}{a_j^T d}}$$

- Определим новую вершину, которую мы добавим в новый базис:

$$\boxed{t = \text{arg}\min_j \{\mu_j \mid \mu_j > 0\}}$$

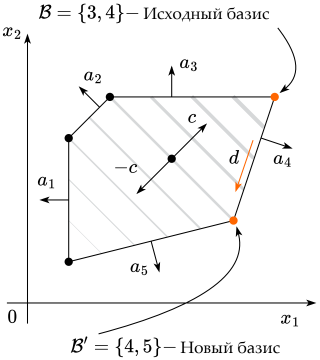
$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \{k\} \cup \{t\}$$

$$x_{\mathcal{B}'} = x_{\mathcal{B}} + \mu_t d = A_{\mathcal{B}'}^{-1} b_{\mathcal{B}'}$$

Выбираем

$\{4, 5\}$

Изменение базиса



Предположим, что некоторые из коэффициентов $\lambda_{\mathcal{B}}$ положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

- Предположим, что у нас есть базис $\mathcal{B}$: $\lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$
- Предположим, что $\lambda_{\mathcal{B}}^k > 0$. Мы хотим удалить k из базиса и сформировать новый:

$$
\begin{cases} A_{\mathcal{B}\setminus\{k\}} d = 0 \\ a_k^T d = -1 \end{cases} \qquad c^T d = \lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} d = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\mathcal{B}}^i (A_{\mathcal{B}} d)^i = -\lambda_{\mathcal{B}}^k < 0
$$

- Для всех $j \notin \mathcal{B}$ рассчитаем размер шага проекции:

$$
\mu_j = \frac{b_j - a_j^T x_{\mathcal{B}}}{a_j^T d}
$$

- Определим новую вершину, которую мы добавим в новый базис:

$$
t = \arg\min_j \{\mu_j \mid \mu_j > 0\}
$$
$$
\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \{k\} \cup \{t\}
$$
$$
x_{\mathcal{B}'} = x_{\mathcal{B}} + \mu_t d = A_{\mathcal{B}'}^{-1} b_{\mathcal{B}'}
$$

- Обратите внимание, что изменение базиса приводит к уменьшению целевой функции: $c^T x_{\mathcal{B}'} = c^T (x_{\mathcal{B}} + \mu_t d) = c^T x_{\mathcal{B}} + \mu_t c^T d$

Поиск начального допустимого базиса

Нам нужно решить следующую задачу:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\
\text{s.t. } & Ax \leq b
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Предложенный алгоритм требует начального допустимого базиса.

Поиск начального допустимого базиса

Нам нужно решить следующую задачу:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\
\text{s.t. } & Ax \leq b
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Предложенный алгоритм требует начального допустимого базиса.

Начнём с переформулировки задачи:

$$
\begin{aligned}
&\min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} c^\top (y - z) \\
\text{s.t. } & Ay - Az \leq b \\
& y \geq 0, z \geq 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$x = y - z$

$y \geq 0 \qquad z \geq 0$

Поиск начального допустимого базиса

Нам нужно решить следующую задачу:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\
\text{s.t. } & Ax \leq b
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Предложенный алгоритм требует начального допустимого базиса.

Начнём с переформулировки задачи:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} c^\top (y - z) \\
\text{s.t. } & Ay - Az \leq b \\
& y \geq 0, z \geq 0
\end{aligned}
}
\tag{2}
$$

Зная решение задачи (2), можно восстановить решение задачи (1), и наоборот.

$x^+ - x^-$

$$
\boxed{x = y - z \quad \Leftrightarrow \quad y_i = \max(x_i, 0), \quad z_i = \max(-x_i, 0)}
$$

Теперь мы попытаемся сформулировать новую задачу линейного программирования, решение которой будет допустимой базисной точкой для Задачи 2. Это означает, что мы сначала запускаем симплекс-метод для задачи Phase-1, а затем запускаем задачу Phase-2 с известным начальным решением. Обратите внимание, что допустимое базисное решение для Phase-1 должно быть легко вычислимо.

Поиск начального допустимого базиса

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} c^\top (y - z)$$

s.t. $Ay - Az \leq b$ (Фаза-2 (главная задача ЛП))

$y \geq 0, z \geq 0$

ЗНАЕМ

ВСПОМОГ.

ЗАД. LP

УГЛ.

НАЧА ЗАД.

Поиск начального допустимого базиса

$$
\begin{aligned}
&\min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} c^\top (y - z) \\
\text{s.t. } & Ay - Az \leq b \\
& y \geq 0, z \geq 0
\end{aligned}
\qquad \text{(Фаза-2 (главная задача ЛП))}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\min_{\xi \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} \xi_i \\
\text{s.t. } & Ay - Az \leq b + \xi \\
& y \geq 0, z \geq 0, \xi \geq 0
\end{aligned}
\qquad \text{(Фаза-1)}
}
$$

Поиск начального допустимого базиса

$$
\begin{aligned}
&\min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} c^\top (y - z) \\
\text{s.t. } & Ay - Az \leq b \qquad\qquad \text{(Фаза-2 (главная задача ЛП))} \\
& y \geq 0, z \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min_{\xi \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \xi_i \\
\text{s.t. } & Ay - Az \leq b + \xi \qquad\qquad \text{(Фаза-1)} \\
& y \geq 0, z \geq 0, \xi \geq 0
\end{aligned}
$$

- Если Фаза-2 (главная задача ЛП) имеет допустимое решение, то оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные ξ_i равны нулю).
  Доказательство: тривиальная проверка.

$\exists\, y, z: \; Ay - Az \leq b$

$y \geq 0$

$z \geq 0$

Поиск начального допустимого базиса

$$\min_{y\in\mathbb{R}^n, z\in\mathbb{R}^n} c^\top (y - z)$$

$$\text{s.t. } Ay - Az \leq b$$

$$y \geq 0, z \geq 0$$

(Фаза-2 (главная задача ЛП))

РАЗМЕРНОСТЬ : 2n

угл:

$$\min_{\xi\in\mathbb{R}^m, y\in\mathbb{R}^n, z\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \xi_i$$

$$\text{s.t. } Ay - Az \leq b + \xi$$

$$y \geq 0, z \geq 0, \xi \geq 0$$

РАЗМЕРН. 2n+m

(Фаза-1)

если $\xi_i^* = 0$

y^*, z^* :

2n+m ограничений

ВЫПОЛНЕНЫ КАК РАВЕНСТВА

- Если Фаза-2 (главная задача ЛП) имеет допустимое решение, то оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные ξ_i равны нулю). **Доказательство:** тривиальная проверка.
- Если оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные ξ_i равны нулю), то мы получаем допустимый базис для Фаза-2. (угл. точка) **Доказательство:** тривиальная проверка.

$$\boxed{\begin{matrix} Ay^* - Az^* \leq b \\ y^* \geq 0 \quad z^* \geq 0 \end{matrix}}$$ 2n огр.

$\xi^* \geq 0$ m

Поиск начального допустимого базиса

$$
\begin{aligned}
&\min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} c^\top (y - z) \\
\text{s.t. } & Ay - Az \leq b \\
& y \geq 0, z \geq 0
\end{aligned}
\tag{Фаза-2 (главная задача ЛП)}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min_{\xi \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \xi_i \\
\text{s.t. } & Ay - Az \leq b + \xi \\
& y \geq 0, z \geq 0, \xi \geq 0
\end{aligned}
\tag{Фаза-1}
$$

- Если Фаза-2 (главная задача ЛП) имеет допустимое решение, то оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные ξ_i равны нулю).
  Доказательство: тривиальная проверка.
- Если оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные ξ_i равны нулю), то мы получаем допустимый базис для Фаза-2.
  Доказательство: тривиальная проверка.

Поиск начального допустимого базиса

$$
\begin{aligned}
&\min_{y\in\mathbb{R}^n, z\in\mathbb{R}^n} c^\top(y-z) \\
\text{s.t. } & Ay - Az \le b \\
& y \ge 0, z \ge 0
\end{aligned}
\qquad \text{(Фаза-2 (главная задача ЛП))}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min_{\xi\in\mathbb{R}^m, y\in\mathbb{R}^n, z\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \xi_i \\
\text{s.t. } & Ay - Az \le b + \xi \\
& y \ge 0, z \ge 0, \xi \ge 0
\end{aligned}
\qquad \text{(Фаза-1)}
$$

→ уГП. ТОЧКА для Ф2

- Если Фаза-2 (главная задача ЛП) имеет допустимое решение, то оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные ξ_i равны нулю).
  Доказательство: тривиальная проверка.
- Если оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные ξ_i равны нулю), то мы получаем допустимый базис для Фаза-2.
  Доказательство: тривиальная проверка.

- Теперь мы знаем, что если мы можем решить задачу Фаза-1, то мы либо найдём начальную точку для симплекс-метода в исходном методе (если переменные ξ_i равны нулю), либо проверим, что исходная задача не имеет допустимого решения (если переменные ξ_i не равны нулю).

хотим уГП. точку ФАЗЫ 1

$\xi_i = 0, \; b_i > 0 \qquad y_i = 0$

$\xi_i = -b, \; b_i \le 0 \qquad z_i = 0$

Поиск начального допустимого базиса

$$
\begin{aligned}
&\min_{y\in\mathbb{R}^n, z\in\mathbb{R}^n} c^\top (y-z) \\
\text{s.t. } & Ay - Az \leq b \\
& y \geq 0, z \geq 0
\end{aligned}
\qquad \text{(Фаза-2 (главная задача ЛП))}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min_{\xi\in\mathbb{R}^m, y\in\mathbb{R}^n, z\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \xi_i \\
\text{s.t. } & Ay - Az \leq b + \xi \\
& y \geq 0, z \geq 0, \xi \geq 0
\end{aligned}
\qquad \text{(Фаза-1)}
$$

- Если Фаза-2 (главная задача ЛП) имеет допустимое решение, то оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные ξ_i равны нулю).
  Доказательство: тривиальная проверка.
- Если оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные ξ_i равны нулю), то мы получаем допустимый базис для Фаза-2.
  Доказательство: тривиальная проверка.

- Теперь мы знаем, что если мы можем решить задачу Фаза-1, то мы либо найдём начальную точку для симплекс-метода в исходном методе (если переменные ξ_i равны нулю), либо проверим, что исходная задача не имеет допустимого решения (если переменные ξ_i не равны нулю).
- Но как решить задачу Фаза-1? Она имеет допустимое базисное решение (задача имеет $2n+m$ переменных, и точка ниже гарантирует, что $2n+m$ неравенств удовлетворяются как равенства (активны).)

Поиск начального допустимого базиса

$$
\begin{aligned}
&\min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} c^\top (y - z) \\
\text{s.t. } & Ay - Az \leq b \\
& y \geq 0, z \geq 0
\end{aligned}
\qquad \text{(Фаза-2 (главная задача ЛП))}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min_{\xi \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} \xi_i \\
\text{s.t. } & Ay - Az \leq b + \xi \\
& y \geq 0, z \geq 0, \xi \geq 0
\end{aligned}
\qquad \text{(Фаза-1)}
$$

- Если Фаза-2 (главная задача ЛП) имеет допустимое решение, то оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные ξ_i равны нулю).
  Доказательство: тривиальная проверка.
- Если оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные ξ_i равны нулю), то мы получаем допустимый базис для Фаза-2.
  Доказательство: тривиальная проверка.

- Теперь мы знаем, что если мы можем решить задачу Фаза-1, то мы либо найдём начальную точку для симплекс-метода в исходном методе (если переменные ξ_i равны нулю), либо проверим, что исходная задача не имеет допустимого решения (если переменные ξ_i не равны нулю).
- Но как решить задачу Фаза-1? Она имеет допустимое базисное решение (задача имеет $2n + m$ переменных, и точка ниже гарантирует, что $2n + m$ неравенств удовлетворяются как равенства (активны).)

Поиск начального допустимого базиса

$$
\begin{aligned}
\min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} \; & c^\top (y - z) \\
\text{s.t. } & Ay - Az \leq b \\
& y \geq 0, z \geq 0
\end{aligned}
\qquad \text{(Фаза-2 (главная задача ЛП))}
$$

$$
\begin{aligned}
\min_{\xi \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} \; & \sum_{i=1}^m \xi_i \\
\text{s.t. } & Ay - Az \leq b + \xi \\
& y \geq 0, z \geq 0, \xi \geq 0
\end{aligned}
\qquad \text{(Фаза-1)}
$$

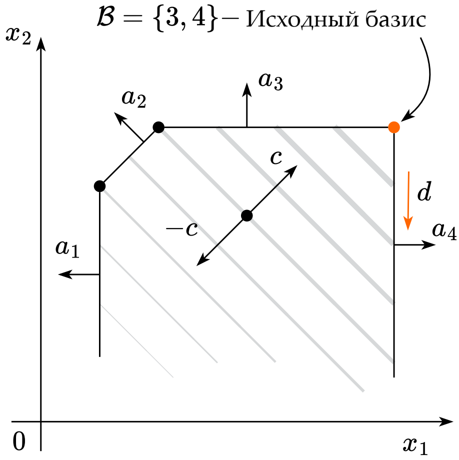
- Если Фаза-2 (главная задача ЛП) имеет допустимое решение, то оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные ξ_i равны нулю).
  Доказательство: тривиальная проверка.
- Если оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные ξ_i равны нулю), то мы получаем допустимый базис для Фаза-2.
  Доказательство: тривиальная проверка.

- Теперь мы знаем, что если мы можем решить задачу Фаза-1, то мы либо найдём начальную точку для симплекс-метода в исходном методе (если переменные ξ_i равны нулю), либо проверим, что исходная задача не имеет допустимого решения (если переменные ξ_i не равны нулю).
- Но как решить задачу Фаза-1? Она имеет допустимое базисное решение (задача имеет $2n + m$ переменных, и точка ниже гарантирует, что $2n + m$ неравенств удовлетворяются как равенства (активны).)

$$
z = 0 \quad y = 0 \quad \xi_i = \max(0, -b_i)
$$

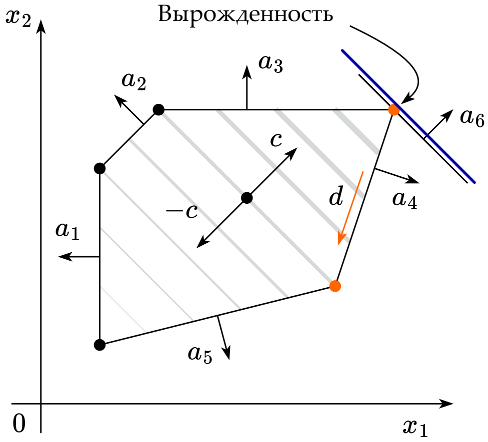
Сходимость симплекс-метода

Неограниченное бюджетное множество



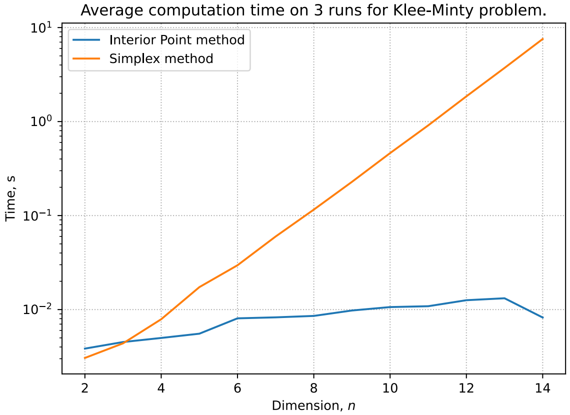
В этом случае не найдётся ни одного положительного μ_j.

Вырожденность вершин



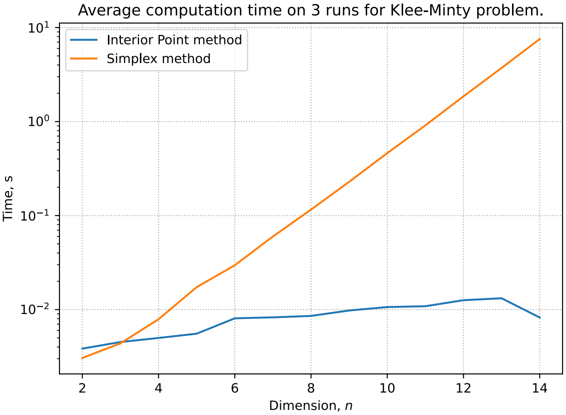
Случаи вырожденности требуют особого рассмотрения. В отсутствие вырожденности на каждой итерации гарантируется монотонное убывание значения целевой функции.

Экспоненциальная сходимость



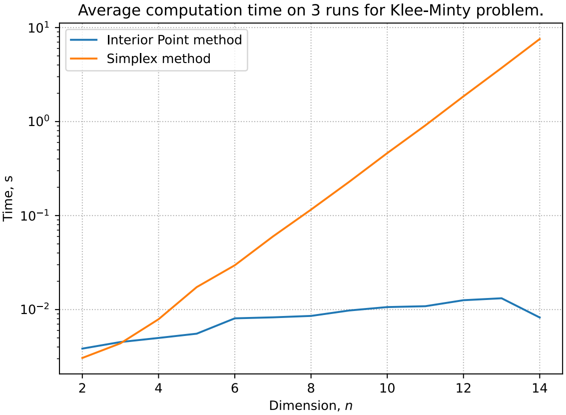
- Много прикладных задач может быть сформулировано в виде задач линейного программирования.

Экспоненциальная сходимость



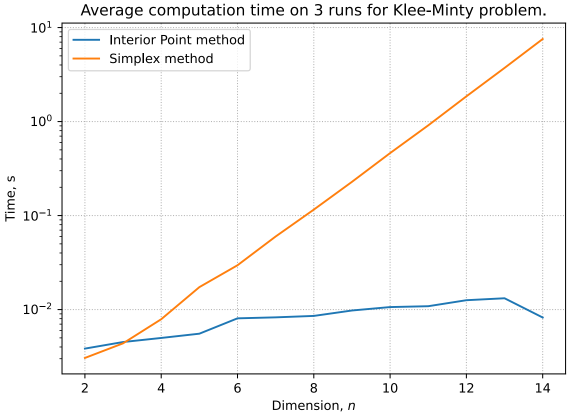
- Много прикладных задач может быть сформулировано в виде задач линейного программирования.
- Симплекс-метод прост в своей основе, но в худшем случае может работать экспоненциально долго.

Экспоненциальная сходимость



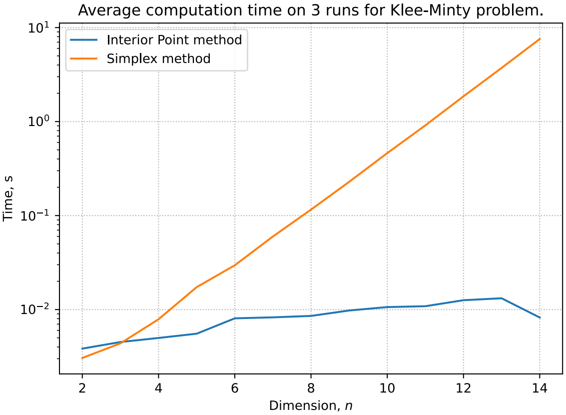
- Много прикладных задач может быть сформулировано в виде задач линейного программирования.
- Симплекс-метод прост в своей основе, но в худшем случае может работать экспоненциально долго.
- Метод эллипсоидов Хачияна (1979) стал первым алгоритмом с доказанной полиномиальной сложностью для задач ЛП. Однако он обычно работает медленнее, чем симплекс-метод в реальных небольших задачах.

Экспоненциальная сходимость



- Много прикладных задач может быть сформулировано в виде задач линейного программирования.
- Симплекс-метод прост в своей основе, но в худшем случае может работать экспоненциально долго.
- Метод эллипсоидов Хачияна (1979) стал первым алгоритмом с доказанной полиномиальной сложностью для задач ЛП. Однако он обычно работает медленнее, чем симплекс-метод в реальных небольших задачах.
- Основной прорыв — метод Кармаркара (1984) для решения задач ЛП с использованием метода внутренней точки.

Экспоненциальная сходимость



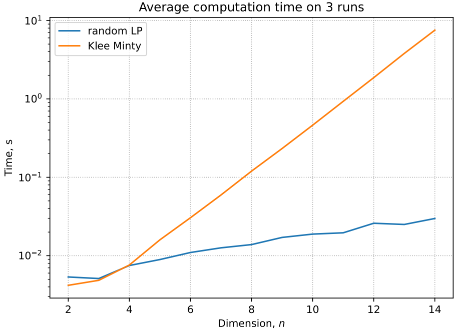
- Много прикладных задач может быть сформулировано в виде задач линейного программирования.
- Симплекс-метод прост в своей основе, но в худшем случае может работать экспоненциально долго.
- Метод эллипсоидов Хачияна (1979) стал первым алгоритмом с доказанной полиномиальной сложностью для задач ЛП. Однако он обычно работает медленнее, чем симплекс-метод в реальных небольших задачах.
- Основной прорыв — метод Кармаркара (1984) для решения задач ЛП с использованием метода внутренней точки.
- Методы внутренней точки являются последним словом в этой области. Тем не менее, для типовых задач ЛП качественные реализации симплекс-метода и методов внутренней точки показывают схожую производительность.

Пример Klee Minty

Так как число вершин конечно, сходимость алгоритма гарантирована (за исключением вырожденных случаев, которые здесь не рассматриваются). Тем не менее, сходимость может быть экспоненциально медленной из-за потенциально большого числа вершин. Существует пример, в котором симплекс-метод вынужден пройти через все вершины многогранника.

В следующей задаче симплекс-метод должен проверить $2^n - 1$ вершин с $x_0 = 0$.

$$
\begin{aligned}
& \max_{x \in \mathbb{R}^n} 2^{n-1}x_1 + 2^{n-2}x_2 + \dots + 2x_{n-1} + x_n \\
\text{s.t. } & x_1 \leq 5 \\
& 4x_1 + x_2 \leq 25 \\
& 8x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 125 \\
& \ldots \\
& 2^n x_1 + 2^{n-1}x_2 + 2^{n-2}x_3 + \ldots + x_n \leq 5^n \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$



Смешанное целочисленное программирование (MIP)

Сложность MIP

Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$
\begin{aligned}
& z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \to \max_{x_1,x_2,x_3,x_4} \\
& \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\
& \boxed{x_i \in \{0,1\} \quad \forall i}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Сложность MIP

Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$
\begin{aligned}
z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 &\to \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\
\text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 14 \\
x_i \in \{0, 1\} \quad &\forall i
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Упростим её до:

$$
\begin{aligned}
z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 &\to \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\
\text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 14 \\
x_i \in [0, 1] \quad &\forall i
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ВЫПУКЛАЯ РЕЛАКСАЦИЯ

Сложность MIP

Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$
\begin{aligned}
z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 &\to \max_{x_1,x_2,x_3,x_4} \\
\text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\le 14 \\
x_i \in \{0,1\} \quad \forall i
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Оптимальное решение

$$
x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, \text{ и } z = 21.
$$

0 1 1 1

Упростим её до:

$$
\begin{aligned}
z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 &\to \max_{x_1,x_2,x_3,x_4} \\
\text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\le 14 \\
x_i \in [0,1] \quad \forall i
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Сложность MIP

Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$
\begin{aligned}
z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 &\to \max_{x_1,x_2,x_3,x_4} \\
\text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 14 \\
x_i \in \{0,1\} \quad &\forall i
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Оптимальное решение

$$
x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, \text{ и } z = 21.
$$

0 1 1 1

Упростим её до:

$$
\begin{aligned}
z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 &\to \max_{x_1,x_2,x_3,x_4} \\
\text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 14 \\
x_i \in [0,1] \quad &\forall i
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Оптимальное решение

$$
x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0, \text{ и } z = 22.
$$

1 1 0.5 0

1 1 1 0

1 1 0 0

Сложность MIP

Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$
\begin{aligned}
z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 &\to \max_{x_1,x_2,x_3,x_4} \\
\text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 14 \\
x_i \in \{0,1\} \quad &\forall i
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Оптимальное решение

$$
x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, \text{ и } z = 21.
$$

0 1 1 1

Упростим её до:

$$
\begin{aligned}
z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 &\to \max_{x_1,x_2,x_3,x_4} \\
\text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 14 \\
x_i \in [0,1] \quad &\forall i
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Оптимальное решение

1 1 0 0

$$
x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0, \text{ и } z = 22.
$$

- Округление $x_3 = 0$: даёт $z = 19$.

Сложность MIP

Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \to \max_{x_1,x_2,x_3,x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 14 \\ x_i \in \{0,1\} \quad \forall i \end{aligned} \tag{3}$$

Оптимальное решение

$$x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, \text{ и } z = 21.$$

Упростим её до:

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \to \max_{x_1,x_2,x_3,x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 14 \\ x_i \in [0,1] \quad \forall i \end{aligned} \tag{4}$$

Оптимальное решение

$$x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0, \text{ и } z = 22.$$

- Округление $x_3 = 0$: даёт $z = 19$.
- Округление $x_3 = 1$: недопустимо.

1110

$5+7+4+0 \le 14$

$16 \le 14$ $\varnothing$

Сложность MIP

Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$
\begin{aligned}
z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 &\to \max_{x_1,x_2,x_3,x_4} \\
\text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 14 \\
x_i \in \{0,1\} \quad \forall i
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Оптимальное решение

$$
x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, \text{ и } z = 21.
$$

Упростим её до:

$$
\begin{aligned}
z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 &\to \max_{x_1,x_2,x_3,x_4} \\
\text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 14 \\
x_i \in [0,1] \quad \forall i
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Оптимальное решение

$$
x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0, \text{ и } z = 22.
$$

- Округление $x_3 = 0$: даёт $z = 19$.
- Округление $x_3 = 1$: недопустимо.

Сложность MIP

Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$
\begin{aligned}
z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \to & \max_{x_1,x_2,x_3,x_4} \\
\text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 14 & \\
x_i \in \{0,1\} \quad \forall i &
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Оптимальное решение

$$
x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, \text{ и } z = 21.
$$

Упростим её до:

$$
\begin{aligned}
z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \to & \max_{x_1,x_2,x_3,x_4} \\
\text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 14 & \\
x_i \in [0,1] \quad \forall i &
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Оптимальное решение

$$
x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0, \text{ и } z = 22.
$$

- Округление $x_3 = 0$: даёт $z = 19$.
- Округление $x_3 = 1$: недопустимо.

❗ MIP намного сложнее, чем ЛП

- Наивное округление решения, полученного для ЛП-релаксации исходной задачи MIP, может привести к недопустимому или неоптимальному решению.

Сложность MIP

Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$
\begin{aligned}
& z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \to \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\
\text{s.t. } & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\
& x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Оптимальное решение

$$
x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, \text{ и } z = 21.
$$

Упростим её до:

$$
\begin{aligned}
& z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \to \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\
\text{s.t. } & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\
& x_i \in [0, 1] \quad \forall i
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Оптимальное решение

$$
x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0, \text{ и } z = 22.
$$

- Округление $x_3 = 0$: даёт $z = 19$.
- Округление $x_3 = 1$: недопустимо.

❗ MIP намного сложнее, чем ЛП

- Наивное округление решения, полученного для ЛП-релаксации исходной задачи MIP, может привести к недопустимому или неоптимальному решению.
- Общая задача MIP является NP-трудной задачей.

Сложность MIP

Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$
\begin{aligned}
z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 &\to \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\
\text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 14 \\
x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Оптимальное решение

$$
x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, \text{ и } z = 21.
$$

Упростим её до:

$$
\begin{aligned}
z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 &\to \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\
\text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 14 \\
x_i \in [0, 1] \quad \forall i
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Оптимальное решение

$$
x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0, \text{ и } z = 22.
$$

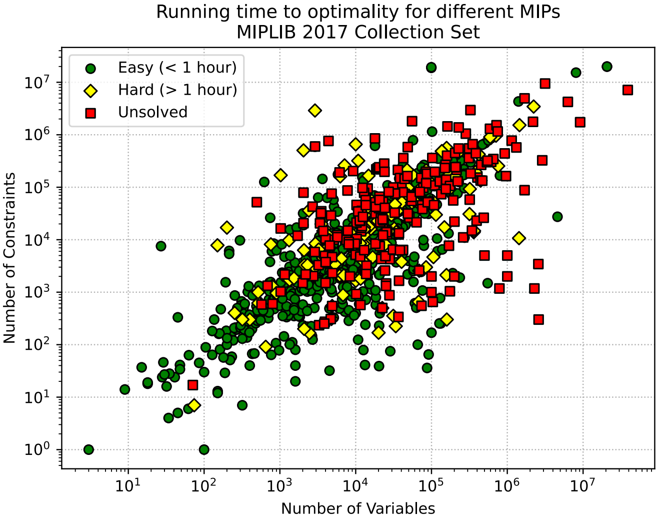
- Округление $x_3 = 0$: даёт $z = 19$.
- Округление $x_3 = 1$: недопустимо.

❗ MIP намного сложнее, чем ЛП

- Наивное округление решения, полученного для ЛП-релаксации исходной задачи MIP, может привести к недопустимому или неоптимальному решению.
- Общая задача MIP является NP-трудной задачей.
- Однако, если матрица коэффициентов MIP является полностью унимодулярной матрицей, то она может быть решена за полиномиальное время.

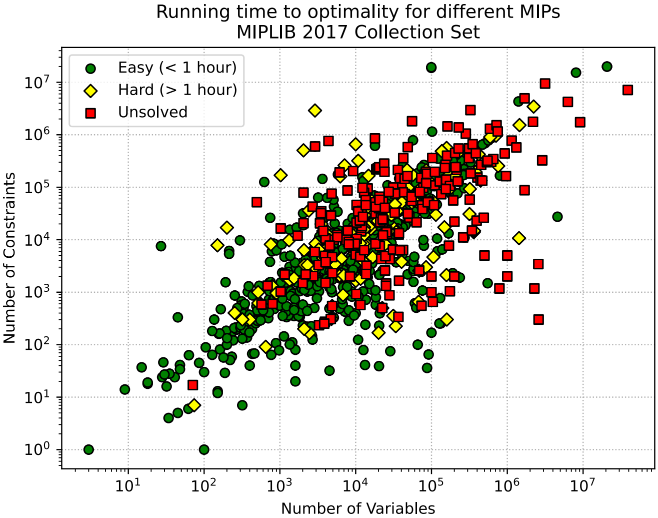
Непредсказуемая сложность MIP

- Трудно предсказать, что будет решено быстро, а что потребует много времени



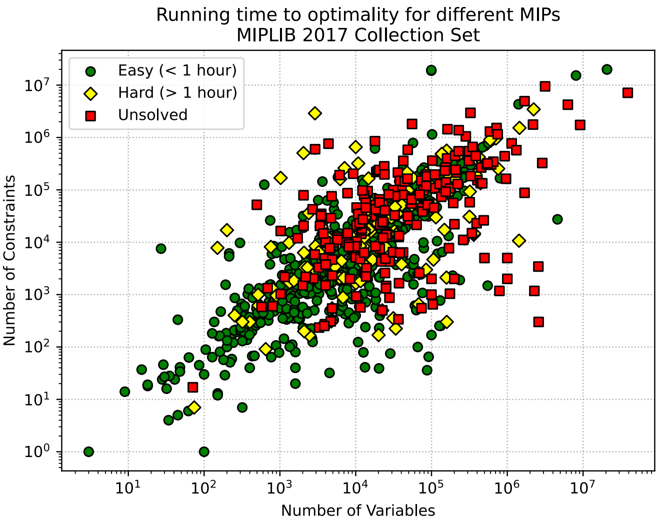
Непредсказуемая сложность MIP

- Трудно предсказать, что будет решено быстро, а что потребует много времени
- 🔗Датасет



Непредсказуемая сложность MIP

- Трудно предсказать, что будет решено быстро, а что потребует много времени
- Датасет
- Код



Прогресс аппаратного vs программного обеспечения

Что бы вы выбрали, если предположить, что вопрос поставлен корректно (вы можете скомпилировать ПО для любого оборудования, и задача в обоих случаях одна и та же)? Мы рассмотрим период с 1992 по 2023 год.

Аппаратное обеспечение

Решение MIP с использованием старого ПО на современном оборудовании

Программное обеспечение

Решение MIP с использованием современного ПО на старом оборудовании

Прогресс аппаратного vs программного обеспечения

Что бы вы выбрали, если предположить, что вопрос поставлен корректно (вы можете скомпилировать ПО для любого оборудования, и задача в обоих случаях одна и та же)? Мы рассмотрим период с 1992 по 2023 год.

Аппаратное обеспечение

Решение MIP с использованием старого ПО на современном оборудовании

$\approx 1.664.510$ x ускорение

Программное обеспечение

Решение MIP с использованием современного ПО на старом оборудовании

$\approx 2.349.000$ x ускорение

Закон Мура утверждает, что вычислительная мощность удваивается каждые 18 месяцев.

Р. ~~Бикси~~ Биксби провёл масштабный эксперимент по сравнению производительности всех версий CPLEX с 1992 по 2007 год и измерил общий прогресс ПО (29000 раз), позже (в 2009 году) он стал одним из основателей Gurobi Optimization, которое дало дополнительное ≈ 81 ускорение на MIP.

[2] R. Bixby report Recent study

Прогресс аппаратного vs программного обеспечения

Что бы вы выбрали, если предположить, что вопрос поставлен корректно (вы можете скомпилировать ПО для любого оборудования, и задача в обоих случаях одна и та же)? Мы рассмотрим период с 1992 по 2023 год.

Аппаратное обеспечение

Решение MIP с использованием старого ПО на современном оборудовании

$\approx 1.664.510$ x ускорение

Закон Мура утверждает, что вычислительная мощность удваивается каждые 18 месяцев.

Программное обеспечение

Решение MIP с использованием современного ПО на старом оборудовании

$\approx 2.349.000$ x ускорение

Р. Биксби провёл масштабный эксперимент по сравнению производительности всех версий CPLEX с 1992 по 2007 год и измерил общий прогресс ПО (29000 раз), позже (в 2009 году) он стал одним из основателей Gurobi Optimization, которое дало дополнительное ≈ 81 ускорение на MIP.

Оказывается, что если вам нужно решить MIP, лучше использовать старый компьютер и современные методы, чем наоборот, самый новый компьютер и методы начала 1990-х годов![2]

[2] R. Bixby report Recent study

Источники

- Теория оптимизации (MATH4230) курс @ CUHK, профессор Тейюн Цень