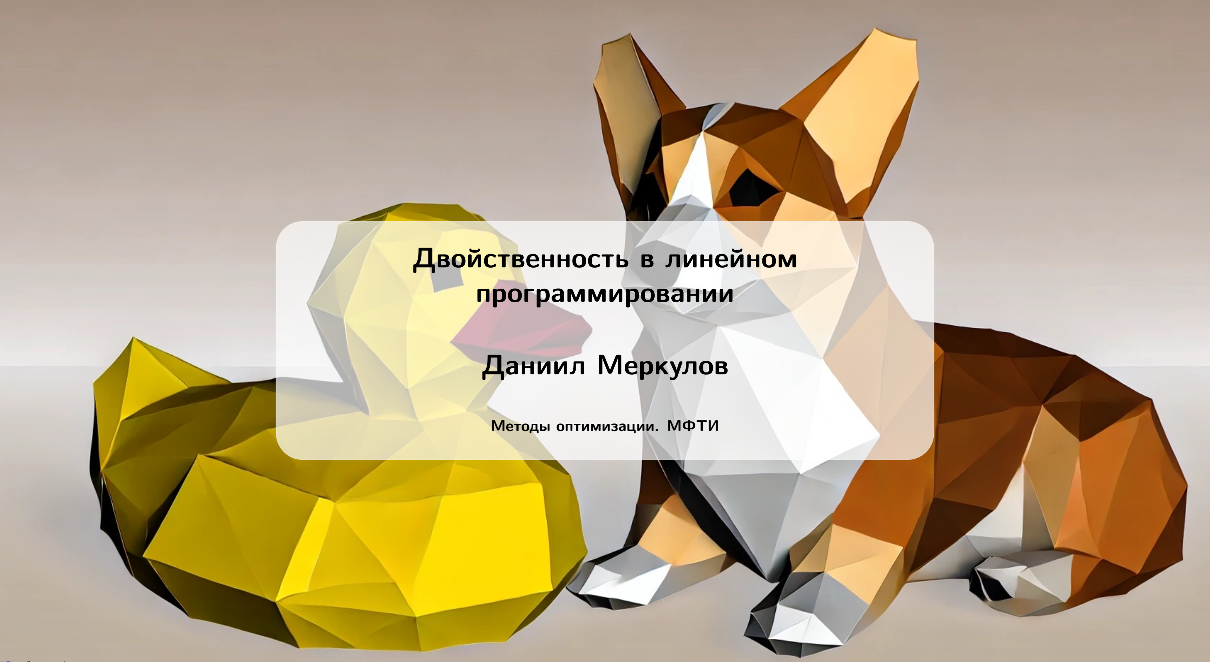


Двойственность в линейном программировании

Даниил Меркулов

Методы оптимизации. МФТИ

Двойственность в линейном программировании

Двойственность

$-x \leq 0$

$Ax - b = 0$

Прямая задача:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x$$
$$\text{s.t. } Ax = b$$
$$x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, n$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

двойств к LP в станд. форме это ЛП в форме ineq.

Двойственная задача

1) $L(x, \lambda, \nu) = c^T x + \nu^T (Ax - b) + \lambda^T (-x)$

$= \langle c + A^T \nu - \lambda, x \rangle - \nu^T b$

2) Двойственная функция:

$$g(\lambda, \nu) \overset{(1)}{=} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \nu) = \begin{cases} -\nu^T b, & c + A^T \nu - \lambda = 0 \\ -\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

3) $-\nu^T b \to \max\limits_{\nu, \lambda}$

$c + A^T \nu - \lambda = 0 \to \lambda = c + A^T \nu$

$\lambda \geq 0$

$$\boxed{\begin{aligned} & -b^T \nu \to \max_{\nu \in \mathbb{R}^m} \\ & A^T \nu + c \geq 0 \end{aligned}}$$

$b^T \nu \to \min\limits_{\nu}$

$A^T \nu \geq -c$

$\nu = \tilde{x}$

$c = \tilde{b}$

$b = \tilde{c}$

$-A^T = \tilde{A}$

$$\boxed{\begin{aligned} & \tilde{c}^T \tilde{x} \to \min_{\tilde{x}} \\ & \tilde{A} \tilde{x} \leq \tilde{b} \end{aligned}}$$

Двойственность

Прямая задача:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x$$
$$\text{s.t. } Ax = b$$
$$x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, n \tag{1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} -b^T\nu &\to \max_{\nu \in \mathbb{R}^m} \\ A^T\nu + c &\geq 0 \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ $b^T\nu \to \min_{\nu \in \mathbb{R}^m}$

$-A^T\nu - c \leq 0$

1) $L = b^T\nu + \mu^T(-A^T\nu - c) =$

$= \langle b - A\mu, \nu \rangle - \mu^T c$

2) $g = \inf_{\nu \in \mathbb{R}^m} L = -\mu^T c$, если $b - A\mu = 0$

$-c^T\mu \to \max_{\mu \in \mathbb{R}^n}$

$A\mu = b$

$\mu \geq 0$

$c^T x \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$

$Ax = b$

$x \geq 0$

Двойственность

Прямая задача:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\
\text{s.t. } & Ax = b \\
& x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x$

$Ax \leq b$

Построить двойств. задачу

1) $L(x, \lambda) = c^T x + \lambda^T (Ax - b)$

$= \langle c + A^T \lambda, x \rangle - \lambda^T b$

2) $g(\lambda) = -\lambda^T b$, если $c + A^T \lambda = 0$

3) $-b^T \lambda \to \max\limits_{\lambda \in \mathbb{R}^m}$

$c + A^T \lambda = 0$

$\lambda \geq 0$

$\rightsquigarrow$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
& b^T \lambda \to \min_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \\
& c + A^T \lambda = 0 \\
& \lambda \geq 0
\end{aligned}
}
$$

Двойственность

Прямая задача:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\
\text{s.t. } & Ax = b \\
& x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ККТ для оптимальных x^*, ν^*, λ^*:

$$
\begin{aligned}
&L(x, \nu, \lambda) = c^T x + \nu^T (Ax - b) - \lambda^T x \\
&-A^T \nu^* + \lambda^* = c \\
&Ax^* = b \\
&x^* \succeq 0 \\
&\lambda^* \succeq 0 \\
&\lambda_i^* x_i^* = 0
\end{aligned}
$$

Двойственность

Прямая задача:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\
\text{s.t. } & Ax = b \\
& x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ККТ для оптимальных x^*, ν^*, λ^*:

KKT

$$
\begin{cases}
L(x, \nu, \lambda) = c^T x + \nu^T(Ax - b) - \lambda^T x \\
-A^T\nu^* + \lambda^* = c \\
Ax^* = b \\
x^* \succeq 0 \\
\lambda^* \succeq 0 \\
\lambda_i^* x_i^* = 0
\end{cases}
$$

$| (\ )^T \cdot x^*$ $\quad | x^{*T} \cdot$

$-\nu^{*T} A \cdot x^* + \lambda^{*T} x^* = c^T x^*$

Имеет следующую двойственную:

$$
\begin{aligned}
&\max_{\nu \in \mathbb{R}^m} -b^\top \nu \\
\text{s.t. } & -A^T\nu \preceq c
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Найдите двойственную задачу к задаче выше (она должна быть исходной задаче ЛП). Также запишите условия ККТ для двойственной задачи, чтобы убедиться, что они идентичны условиям ККТ для прямой задачи.

Сильная двойственность в линейном программировании

(i) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 имеет (конечное) решение, то и другая имеет, и значения целевых функций равны.

Сильная двойственность в линейном программировании

(i) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 имеет (конечное) решение, то и другая имеет, и значения целевых функций равны.

(ii) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 неограничена, то другая задача недопустима.

Сильная двойственность в линейном программировании

(i) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 имеет (конечное) решение, то и другая имеет, и значения целевых функций равны.

(ii) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 неограничена, то другая задача недопустима.

Сильная двойственность в линейном программировании

(i) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 имеет (конечное) решение, то и другая имеет, и значения целевых функций равны.

(ii) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 неограничена, то другая задача недопустима.

ДОК-ВО. Для (i) предположим, что Equation 1 имеет конечное оптимальное решение x^*. Из ККТ следует, что существуют оптимальные векторы λ^* и ν^* такие, что (x^*, ν^*, λ^*) удовлетворяет ККТ. Мы отметили выше, что ККТ для Equation 1 и Equation 2 эквивалентны. Более того, как утверждалось, $c^T x^* = (-A^T \nu^* + \lambda^*)^T x^* = -(\nu^*)^T A x^* = -b^T \nu^*$. Симметричный аргумент справедлив, если мы начнем с предположения, что двойственная задача Equation 2 имеет решение.

опт. значение $f_0(x^*)$ =

$$c^T x^* = (-A^T \nu^* + \lambda^*)^T x^* = -\nu^{*T} A x^* + \underbrace{\lambda^{*T} x^*} = -\nu^{*T} A x^*$$

$$= \underbrace{-\nu^{*T} b}$$

опт. реш. двойств

Сильная двойственность в линейном программировании

(i) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 имеет (конечное) решение, то и другая имеет, и значения целевых функций равны.

(ii) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 неограничена, то другая задача недопустима.

ДОК-ВО. Для (i) предположим, что Equation 1 имеет конечное оптимальное решение x^*. Из ККТ следует, что существуют оптимальные векторы λ^* и ν^* такие, что (x^*, ν^*, λ^*) удовлетворяет ККТ. Мы отметили выше, что ККТ для Equation 1 и Equation 2 эквивалентны. Более того, как утверждалось, $c^T x^* = (-A^T \nu^* + \lambda^*)^T x^* = -(\nu^*)^T A x^* = -b^T \nu^*$. Симметричный аргумент справедлив, если мы начнем с предположения, что двойственная задача Equation 2 имеет решение.

Чтобы доказать (ii), предположим, что прямая задача неограничена, то есть существует последовательность точек x_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ такая, что

$$\boxed{c^T x_k \downarrow -\infty, \quad A x_k = b, \quad x_k \geq 0.}$$

Сильная двойственность в линейном программировании

(i) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 имеет (конечное) решение, то и другая имеет, и значения целевых функций равны.

(ii) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 неограничена, то другая задача недопустима.

ДОК-ВО. Для (i) предположим, что Equation 1 имеет конечное оптимальное решение x^*. Из ККТ следует, что существуют оптимальные векторы λ^* и ν^* такие, что (x^*, ν^*, λ^*) удовлетворяет ККТ. Мы отметили выше, что ККТ для Equation 1 и Equation 2 эквивалентны. Более того, как утверждалось, $c^T x^* = (-A^T \nu^* + \lambda^*)^T x^* = -(\nu^*)^T A x^* = -b^T \nu^*$. Симметричный аргумент справедлив, если мы начнем с предположения, что двойственная задача Equation 2 имеет решение.

Чтобы доказать (ii), предположим, что прямая задача неограничена, то есть существует последовательность точек x_k, $k = 1, 2, 3, \dots$ такая, что

$$c^T x_k \downarrow -\infty, \quad A x_k = b, \quad x_k \ge 0.$$

$\forall \nu : \nu^T b = +\infty$

Предположим также, что двойственная задача Equation 2 допустима, то есть существует вектор $\bar{\nu}$ такой, что $\boxed{-A^T \bar{\nu} \le c}$. Из последнего неравенства вместе с $x_k \ge 0$ имеем, что $\boxed{-\bar{\nu}^T A x_k \le c^T x_k}$ и поэтому

• x_k $\exists \bar{\nu}$ $\downarrow -\infty$

$$\boxed{-\bar{\nu}^T b = -\bar{\nu}^T A x_k} \le c^T x_k \downarrow -\infty,$$

что приводит к противоречию. Следовательно, двойственная задача должна быть недопустимой. Аналогичный аргумент можно использовать, чтобы показать, что неограниченность двойственной задачи влечет недопустимость прямой.

Анализ чувствительности

Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации

$$
\begin{aligned}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, p
\end{aligned}
\qquad \text{(P)}
$$

Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации

$$
\begin{split}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, p
\end{split} \tag{P}
$$

К возмущённой версии:

$$
\boxed{
\begin{split}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq u_i, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = v_i, \; i = 1, \ldots, p
\end{split}
} \tag{Per}
$$

Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации

$$
\begin{aligned}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \le 0, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, p
\end{aligned}
\tag{P}
$$

К возмущённой версии:

$$
\begin{aligned}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \le u_i, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = v_i, \; i = 1, \ldots, p
\end{aligned}
\tag{Per}
$$

Заметим, что у нас по-прежнему есть только переменная $\boxed{x \in \mathbb{R}^n}$, в то время как $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p$ мы рассматриваем как параметры. Очевидно, что $\boxed{\text{Per}(u, v) \to \text{P}, \text{ если } u = 0, v = 0.}$ Мы будем обозначать оптимальное значение Per как $\boxed{p^*(u, v)}$, в то время как оптимальное значение исходной задачи P — просто p^*. Можно сразу сказать, что $p^*(u, v) = p^*$.

$p^*(0,0) = p^*$

Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации К возмущённой версии:

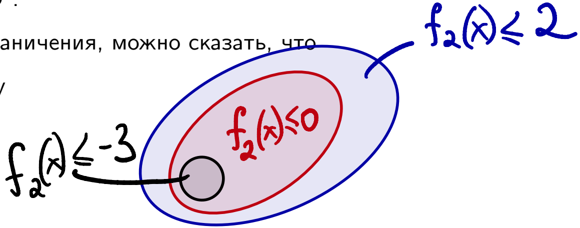
$$\begin{aligned} & f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } & f_i(x) \le 0, \; i = 1, \ldots, m \\ & h_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, p \end{aligned} \qquad \text{(P)}$$

$$\begin{aligned} & f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } & f_i(x) \le u_i, \; i = 1, \ldots, m \\ & h_i(x) = v_i, \; i = 1, \ldots, p \end{aligned} \qquad \text{(Per)}$$

Заметим, что у нас по-прежнему есть только переменная $x \in \mathbb{R}^n$, в то время как $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p$ мы рассматриваем как параметры. Очевидно, что Per$(u, v) \to$ P, если $u = 0, v = 0$. Мы будем обозначать оптимальное значение Per как $p^*(u, v)$, в то время как оптимальное значение исходной задачи P — просто p^*. Можно сразу сказать, что $p^*(0, 0) = p^*$.

Говоря о значении некоторого i-го ограничения, можно сказать, что

- $u_i = 0$ оставляет исходную задачу



Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации К возмущённной версии:

$$
\begin{split}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, p
\end{split}
\tag{P}
$$

$$
\begin{split}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq u_i, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = v_i, \; i = 1, \ldots, p
\end{split}
\tag{Per}
$$

Заметим, что у нас по-прежнему есть только переменная $x \in \mathbb{R}^n$, в то время как $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p$ мы рассматриваем как параметры. Очевидно, что Per$(u, v) \to$ P, если $u = 0, v = 0$. Мы будем обозначать оптимальное значение Per как $p^*(u, v)$, в то время как оптимальное значение исходной задачи P — просто p^*. Можно сразу сказать, что $p^*(u, v) = p^*$.

Говоря о значении некоторого i-го ограничения, можно сказать, что

- $u_i = 0$ оставляет исходную задачу
- $u_i > 0$ означает, что мы ослабили неравенство

Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации К возмущённной версии:

$$
\begin{split}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, p
\end{split}
\tag{P}
$$

$$
\begin{split}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq u_i, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = v_i, \; i = 1, \ldots, p
\end{split}
\tag{Per}
$$

Заметим, что у нас по-прежнему есть только переменная $x \in \mathbb{R}^n$, в то время как $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p$ мы рассматриваем как параметры. Очевидно, что Per$(u, v) \to$ P, если $u = 0, v = 0$. Мы будем обозначать оптимальное значение Per как $p^*(u, v)$, в то время как оптимальное значение исходной задачи P — просто p^*. Можно сразу сказать, что $p^*(u, v) = p^*$.

Говоря о значении некоторого i-го ограничения, можно сказать, что

- $u_i = 0$ оставляет исходную задачу
- $u_i > 0$ означает, что мы ослабили неравенство
- $u_i < 0$ означает, что мы ужесточили ограничение

Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации К возмущённой версии:

$$
\begin{split}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, p
\end{split}
\tag{P}
$$

$$
\begin{split}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq u_i, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = v_i, \; i = 1, \ldots, p
\end{split}
\tag{Per}
$$

Заметим, что у нас по-прежнему есть только переменная $x \in \mathbb{R}^n$, в то время как $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p$ мы рассматриваем как параметры. Очевидно, что Per$(u, v) \to$ P, если $u = 0, v = 0$. Мы будем обозначать оптимальное значение Per как $p^*(u, v)$, в то время как оптимальное значение исходной задачи P — просто p^*. Можно сразу сказать, что $p^*(u, v) = p^*$.

Говоря о значении некоторого i-го ограничения, можно сказать, что

- $u_i = 0$ оставляет исходную задачу
- $u_i > 0$ означает, что мы ослабили неравенство
- $u_i < 0$ означает, что мы ужесточили ограничение

Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации К возмущённой версии:

$$
\begin{aligned}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, p
\end{aligned}
\tag{P}
$$

$$
\begin{aligned}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq u_i, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = v_i, \; i = 1, \ldots, p
\end{aligned}
\tag{Per}
$$

Заметим, что у нас по-прежнему есть только переменная $x \in \mathbb{R}^n$, в то время как $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p$ мы рассматриваем как параметры. Очевидно, что Per$(u, v) \to$ P, если $u = 0, v = 0$. Мы будем обозначать оптимальное значение Per как $p^*(u, v)$, в то время как оптимальное значение исходной задачи P — просто p^*. Можно сразу сказать, что $p^*(u, v) = p^*$.

Говоря о значении некоторого i-го ограничения, можно сказать, что

- $u_i = 0$ оставляет исходную задачу
- $u_i > 0$ означает, что мы ослабили неравенство
- $u_i < 0$ означает, что мы ужесточили ограничение

Можно даже показать, что когда P является задачей выпуклой оптимизации, $p^*(u, v)$ является выпуклой функцией.

Анализ чувствительности

Предположим, что $\boxed{\text{сильная двойственность выполняется}}$ для исходной задачи, и предположим, что x — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$$
\underline{p^*(0,0) = p^*} = \underline{d^*} = g(\lambda^*, \nu^*) \leq
$$

Анализ чувствительности

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что x — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$\forall x \in D$

$$
\begin{aligned}
p^*(0,0) = p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) \leq \\
\leq L(x, \lambda^*, \nu^*) =
\end{aligned}
$$

Анализ чувствительности

$x \in D$

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что x — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$\lambda_i^* \geq 0$

$h_i(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
p^*(0,0) = p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) \leq \\
\leq L(x, \lambda^*, \nu^*) = \\
= f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(x) \leq
\end{aligned}
$$

Анализ чувствительности

$\forall x \in S(u,v)$

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что x — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$f_i(x) \leq u_i$

$h_i = v_i$

$$
\begin{aligned}
p^*(0,0) = p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) \leq \\
&\leq L(x, \lambda^*, \nu^*) = \\
&= f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i^* h_i(x) \leq \\
&\leq f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* u_i + \sum_{i=1}^{p} \nu_i^* v_i
\end{aligned}
$$

Анализ чувствительности

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что x — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$$
\begin{aligned}
p^*(0,0) = p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) &\leq \\
&\leq L(x, \lambda^*, \nu^*) = \\
&= f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i^* h_i(x) \leq \\
&\leq f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* u_i + \sum_{i=1}^{p} \nu_i^* v_i
\end{aligned}
$$

$$p^* \leq f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* u_i + \sum_{i=1}^{p} \nu_i^* v_i$$

$$\boxed{f_0(x) \geq p^* - \sum_i \lambda_i^* u_i - \sum_i \nu_i^* v_i}$$

Анализ чувствительности

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что x — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$$
\begin{aligned}
p^*(0,0) = p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) \leq \\
&\leq L(x, \lambda^*, \nu^*) = \\
&= f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i^* h_i(x) \leq \\
&\leq f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* u_i + \sum_{i=1}^{p} \nu_i^* v_i
\end{aligned}
$$

Что означает

$$
\boxed{f_0(x) \geq p^*(0,0) - {\lambda^*}^T u - {\nu^*}^T v}
$$

Анализ чувствительности

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что x — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$$
\begin{aligned}
p^*(0,0) = p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) \leq \\
\leq L(x, \lambda^*, \nu^*) = \\
= f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(x) \leq \\
\leq f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* u_i + \sum_{i=1}^p \nu_i^* v_i
\end{aligned}
$$

$\forall x \in S'(u,v)$

Что означает

$$
f_0(x) \geq p^*(0,0) - {\lambda^*}^T u - {\nu^*}^T v
$$

$x^*(u,v)$

И взяв оптимальную x для возмущённой задачи, имеем:

$p^*(u,v) > p^*$

пусть $v=0$

$$
p^*(u,v) \geq p^*(0,0) - {\lambda^*}^T \underset{\wedge 0}{u} \cancel{- {\nu^*}^T v} \tag{3}
$$

пусть $u<0$ $\quad \vee 0$

Анализ чувствительности

В сценариях, где выполняется сильная двойственность, мы можем сделать несколько выводов о чувствительности оптимальных решений по отношению к множителям Лагранжа.

- **Влияние ужесточения ограничения (большое $\lambda_i^\star$):**
  Когда множитель Лагранжа i-го ограничения, $\lambda_i^\star$, имеет существенное значение, и если это ограничение ужесточается (выбирается $u_i < 0$), гарантируется, что оптимальное значение, обозначенное $p^\star(u, v)$, значительно увеличится.

Анализ чувствительности

В сценариях, где выполняется сильная двойственность, мы можем сделать несколько выводов о чувствительности оптимальных решений по отношению к множителям Лагранжа.

- **Влияние ужесточения ограничения (большое $\lambda_i^\star$)**:
  Когда множитель Лагранжа i-го ограничения, $\lambda_i^\star$, имеет существенное значение, и если это ограничение ужесточается (выбирается $u_i < 0$), гарантируется, что оптимальное значение, обозначенное $p^\star(u, v)$, значительно увеличится.
- **Эффект корректировки ограничений с большими положительными или отрицательными $\nu_i^\star$**:
  Если $\nu_i^\star$ велик и положителен, и выбирается $v_i < 0$, или если $\nu_i^\star$ велик и отрицателен, и выбирается $v_i > 0$, то в любом сценарии ожидается, что оптимальное значение $p^\star(u, v)$ значительно увеличится.

Анализ чувствительности

В сценариях, где выполняется сильная двойственность, мы можем сделать несколько выводов о чувствительности оптимальных решений по отношению к множителям Лагранжа.

- **Влияние ужесточения ограничения (большое $\lambda_i^\star$)**:
  Когда множитель Лагранжа i-го ограничения, $\lambda_i^\star$, имеет существенное значение, и если это ограничение ужесточается (выбирается $u_i < 0$), гарантируется, что оптимальное значение, обозначенное $p^\star(u, v)$, значительно увеличится.
- **Эффект корректировки ограничений с большими положительными или отрицательными $\nu_i^\star$**:
  Если $\nu_i^\star$ велик и положителен, и выбирается $v_i < 0$, или если $\nu_i^\star$ велик и отрицателен, и выбирается $v_i > 0$, то в любом сценарии ожидается, что оптимальное значение $p^\star(u, v)$ значительно увеличится.
- **Последствия ослабления ограничения (малое $\lambda_i^\star$)**:
  Если множитель Лагранжа $\lambda_i^\star$ для i-го ограничения относительно мал, и ограничение ослабляется (выбирается $u_i > 0$), ожидается, что оптимальное значение $p^\star(u, v)$ не значительно уменьшится.

Анализ чувствительности

В сценариях, где выполняется сильная двойственность, мы можем сделать несколько выводов о чувствительности оптимальных решений по отношению к множителям Лагранжа.

- **Влияние ужесточения ограничения (большое $\lambda_i^\star$)**:
  Когда множитель Лагранжа i-го ограничения, $\lambda_i^\star$, имеет существенное значение, и если это ограничение ужесточается (выбирается $u_i < 0$), гарантируется, что оптимальное значение, обозначенное $p^\star(u, v)$, значительно увеличится.
- **Эффект корректировки ограничений с большими положительными или отрицательными $\nu_i^\star$**:
  Если $\nu_i^\star$ велик и положителен, и выбирается $v_i < 0$, или если $\nu_i^\star$ велик и отрицателен, и выбирается $v_i > 0$, то в любом сценарии ожидается, что оптимальное значение $p^\star(u, v)$ значительно увеличится.
- **Последствия ослабления ограничения (малое $\lambda_i^\star$)**:
  Если множитель Лагранжа $\lambda_i^\star$ для i-го ограничения относительно мал, и ограничение ослабляется (выбирается $u_i > 0$), ожидается, что оптимальное значение $p^\star(u, v)$ не значительно уменьшится.
- **Результаты крошечных корректировок в ограничениях с малыми $\nu_i^\star$**:
  Когда $\nu_i^\star$ мал и положителен, и выбирается $v_i > 0$, или когда $\nu_i^\star$ мал и отрицателен, и выбирается $v_i < 0$, в обоих случаях оптимальное значение $p^\star(u, v)$ незначительно уменьшится.

Не FAP

Анализ чувствительности

В сценариях, где выполняется сильная двойственность, мы можем сделать несколько выводов о чувствительности оптимальных решений по отношению к множителям Лагранжа.

- **Влияние ужесточения ограничения (большое $\lambda_i^\star$)**:
  Когда множитель Лагранжа i-го ограничения, $\lambda_i^\star$, имеет существенное значение, и если это ограничение ужесточается (выбирается $u_i < 0$), гарантируется, что оптимальное значение, обозначенное $p^\star(u, v)$, значительно увеличится.
- **Эффект корректировки ограничений с большими положительными или отрицательными $\nu_i^\star$**:
  Если $\nu_i^\star$ велик и положителен, и выбирается $v_i < 0$, или если $\nu_i^\star$ велик и отрицателен, и выбирается $v_i > 0$, то в любом сценарии ожидается, что оптимальное значение $p^\star(u, v)$ значительно увеличится.
- **Последствия ослабления ограничения (малое $\lambda_i^\star$)**:
  Если множитель Лагранжа $\lambda_i^\star$ для i-го ограничения относительно мал, и ограничение ослабляется (выбирается $u_i > 0$), ожидается, что оптимальное значение $p^\star(u, v)$ не значительно уменьшится.
- **Результаты крошечных корректировок в ограничениях с малыми $\nu_i^\star$**:
  Когда $\nu_i^\star$ мал и положителен, и выбирается $v_i > 0$, или когда $\nu_i^\star$ мал и отрицателен, и выбирается $v_i < 0$, в обоих случаях оптимальное значение $p^\star(u, v)$ незначительно уменьшится.

Анализ чувствительности

В сценариях, где выполняется сильная двойственность, мы можем сделать несколько выводов о чувствительности оптимальных решений по отношению к множителям Лагранжа.

- **Влияние ужесточения ограничения (большое $\lambda_i^\star$)**:
  Когда множитель Лагранжа i-го ограничения, $\lambda_i^\star$, имеет существенное значение, и если это ограничение ужесточается (выбирается $u_i < 0$), гарантируется, что оптимальное значение, обозначенное $p^\star(u, v)$, значительно увеличится.
- **Эффект корректировки ограничений с большими положительными или отрицательными $\nu_i^\star$**:
  Если $\nu_i^\star$ велик и положителен, и выбирается $v_i < 0$, или если $\nu_i^\star$ велик и отрицателен, и выбирается $v_i > 0$, то в любом сценарии ожидается, что оптимальное значение $p^\star(u, v)$ значительно увеличится.
- **Последствия ослабления ограничения (малое $\lambda_i^\star$)**:
  Если множитель Лагранжа $\lambda_i^\star$ для i-го ограничения относительно мал, и ограничение ослабляется (выбирается $u_i > 0$), ожидается, что оптимальное значение $p^\star(u, v)$ не значительно уменьшится.
- **Результаты крошечных корректировок в ограничениях с малыми $\nu_i^\star$**:
  Когда $\nu_i^\star$ мал и положителен, и выбирается $v_i > 0$, или когда $\nu_i^\star$ мал и отрицателен, и выбирается $v_i < 0$, в обоих случаях оптимальное значение $p^\star(u, v)$ незначительно уменьшится.

Эти интерпретации предоставляют основу для понимания того, как изменения в ограничениях, отражённые через соответствующие множители Лагранжа, влияют на оптимальное решение в задачах, где выполняется сильная двойственность.

Локальная чувствительность

Локальный анализ чувств.

Предположим теперь, что $p^*(u, v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$\frac{\partial p^*(u,v)}{\partial u}\Big|_{(0,0)} \quad \frac{\partial p^*(u,v)}{\partial v}$$

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u, v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$\boxed{\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i}} \tag{4}$$

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u,v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} \tag{4}$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную $\boxed{p^*(u,v)}$ вдоль направления некоторого i-го базисного вектора e_i:

Локальная чувствительность

$p^*(u,v) \geq p^* - u^T\lambda^* - v^T\nu^*$

Предположим теперь, что $p^*(u,v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$
\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} \tag{4}
$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную $p^*(u,v)$ вдоль направления некоторого i-го базисного вектора e_i:

$$
\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{p^*(te_i,0) - p^*(0,0)}{t} = \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i}}
$$

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u, v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$
\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} \tag{4}
$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную $p^*(u, v)$ вдоль направления некоторого i-го базисного вектора e_i:

$$
\lim_{t \to 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0,0)}{t} = \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i}
$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел $t \to 0$ с $t > 0$, имеем

$$p^*(te_i, 0) - p^*$$

$$p^*(u,v) \geq p^* - u^T\lambda^* - v^T\nu^*$$

$$p^*(te_i, 0) - p^* \geq -(te_i)^T\lambda^*$$

$$\geq -t\lambda_i^*$$

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u, v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$
\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} \tag{4}
$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную $p^*(u, v)$ вдоль направления некоторого i-го базисного вектора e_i:

$$
\lim_{t \to 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0,0)}{t} = \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i}
$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел $t \to 0$ с $t > 0$, имеем

$$
\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \geq -\lambda_i^* \to \boxed{\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \geq -\lambda_i^*}
$$

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u,v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$
\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} \tag{4}
$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную $p^*(u,v)$ вдоль направления некоторого i-го базисного вектора e_i:

$$
\lim_{t \to 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0,0)}{t} = \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i}
$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел $t \to 0$ с $t > 0$, имеем

$$
\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \geq -\lambda_i^* \to \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \geq -\lambda_i^*
$$

Для отрицательного $t < 0$ имеем:

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u,v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} \tag{4}$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную $p^*(u,v)$ вдоль направления некоторого i-го базисного вектора e_i:

$$\lim_{t\to 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0,0)}{t} = \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i}$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел $t \to 0$ с $t > 0$, имеем

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \geq -\lambda_i^* \to \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \geq -\lambda_i^*$$

Для отрицательного $t < 0$ имеем:

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \leq -\lambda_i^* \to \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \leq -\lambda_i^*$$

$$\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} = -\lambda_i^*$$

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u, v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} \tag{4}$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную $p^*(u, v)$ вдоль направления некоторого i-го базисного вектора e_i:

$$\lim_{t \to 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0,0)}{t} = \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i}$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел $t \to 0$ с $t > 0$, имеем

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \geq -\lambda_i^* \to \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \geq -\lambda_i^*$$

Для отрицательного $t < 0$ имеем:

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \leq -\lambda_i^* \to \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \leq -\lambda_i^*$$

Та же идея может быть использована для установления факта о v_i.

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u, v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$\boxed{\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \qquad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i}} \tag{4}$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную $p^*(u, v)$ вдоль направления некоторого i-го базисного вектора e_i:

$$\lim_{t \to 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0,0)}{t} = \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i}$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел $t \to 0$ с $t > 0$, имеем

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \geq -\lambda_i^* \to \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \geq -\lambda_i^*$$

Для отрицательного $t < 0$ имеем:

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \leq -\lambda_i^* \to \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \leq -\lambda_i^*$$

Та же идея может быть использована для установления факта о v_i.

Результат локальной чувствительности Equation 4 предоставляет способ понять влияние ограничений на оптимальное решение x^* задачи оптимизации. Если ограничение $f_i(x^*)$ отрицательно в x^*, оно не влияет на оптимальное решение, что означает, что небольшие изменения в этом ограничении не изменят оптимальное значение. В этом случае соответствующий оптимальный множитель Лагранжа будет равен нулю, согласно принципу дополн~~ительной~~ нежёсткости.
яющей

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u, v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$
\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} \tag{4}
$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную $p^*(u, v)$ вдоль направления некоторого i-го базисного вектора e_i:

$$
\lim_{t \to 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0,0)}{t} = \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i}
$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел $t \to 0$ с $t > 0$, имеем

$$
\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \geq -\lambda_i^* \to \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \geq -\lambda_i^*
$$

Для отрицательного $t < 0$ имеем:

$$
\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \leq -\lambda_i^* \to \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \leq -\lambda_i^*
$$

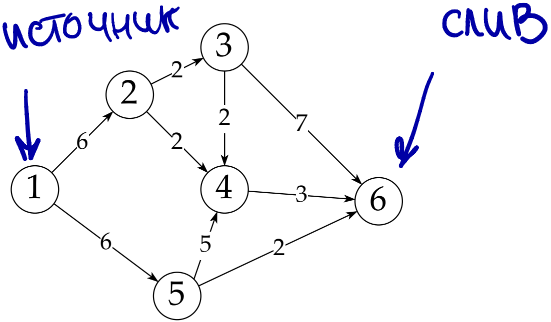
Та же идея может быть использована для установления факта о v_i.

Результат локальной чувствительности Equation 4 предоставляет способ понять влияние ограничений на оптимальное решение x^* задачи оптимизации. Если ограничение $f_i(x^*)$ отрицательно в x^*, оно не влияет на оптимальное решение, что означает, что небольшие изменения в этом ограничении не изменят оптимальное значение. В этом случае соответствующий оптимальный множитель Лагранжа будет равен нулю, согласно принципу дополн~~ительно~~яющей нежёсткости. Однако, если $f_i(x^*) = 0$, что означает, что ограничение точно выполняется в оптимуме, то ситуация иная. Значение i-го оптимального множителя Лагранжа, λ_i^*, даёт нам понимание того, насколько "чувствительно" или "активно" это ограничение. Малое λ_i^* указывает на то, что небольшие корректировки ограничения не будут значительно влиять на оптимальное значение. Наоборот, большое λ_i^* подразумевает, что даже незначительные изменения ограничения могут иметь значительное влияние на оптимальное решение.

Максимальный поток - минимальный разрез

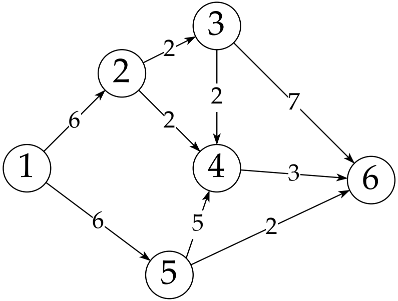
MAX FLOW MIN CUT

Задача максимального потока



Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Задача максимального потока

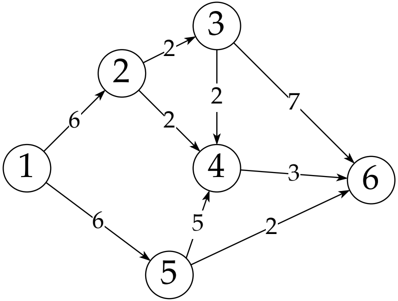


Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.

Задача максимального потока

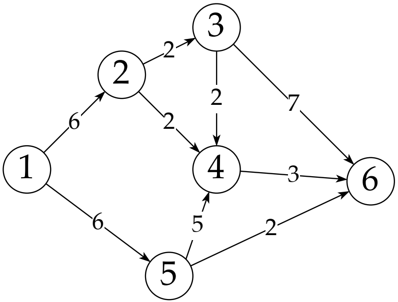


Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) передавать узлу 6 (сток) со скоростью 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Задача максимального потока

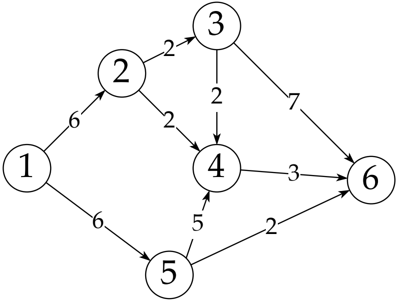


Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) передавать узлу 6 (сток) со скоростью 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Задача максимального потока



Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

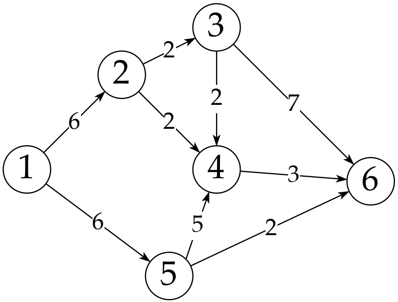
Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) передавать узлу 6 (сток) со скоростью 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Матрица пропускной способности:

$$
C = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Задача максимального потока



Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) передавать узлу 6 (сток) со скоростью 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Матрица пропускной способности:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

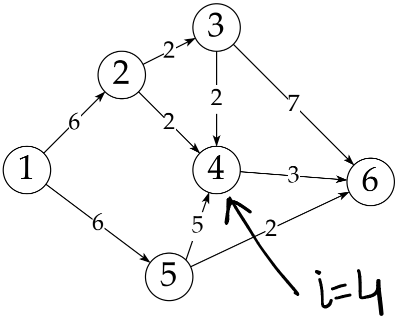
$X \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Матрица потока: $\boxed{X[i,j] \text{ представляет поток от узла } i \text{ к узлу } j.}$

$0 \leq X \leq C$

покомпонентно

Задача максимального потока



Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Поток: 1-6:

$X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16}$

Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) передавать узлу 6 (сток) со скоростью 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Матрица пропускной способности:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица потока: $X[i, j]$ представляет поток от узла i к узлу j.

Ограничения:

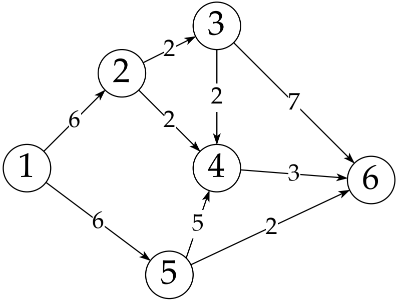
сумма выходов в i-ый узел

сумма входов в i-ый

$$0 \preceq X \qquad X \preceq C$$

Сохранение потока: $\sum\limits_{j=\cancel{2}\,1}^{N} X(i, j) = \sum\limits_{k=1}^{N\cancel{-1}} X(k, i), \; i = 2, \ldots, N-1$

Задача максимального потока



При данной настройке, когда всё, что производится источником, пойдёт к стоку, поток сети — это просто сумма всего, что выходит из источника:

$$\sum_{i=2}^{N} X(1, i) \qquad \text{(Поток)}$$

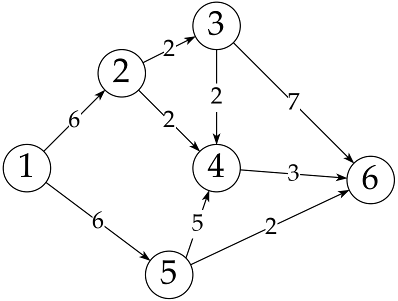
$$\boxed{\langle S, X \rangle} = \mathrm{tr}\, S^T X$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача максимального потока

$\min -\langle X, S\rangle$

MAX FLOW



$$
\begin{aligned}
&\max \ \langle X, S\rangle \\
\text{s.t.}\ & -X \preceq 0 \qquad \mathrm{vec}(-X) \leq 0 \\
& X \preceq C \qquad \mathrm{vec}(X) \leq \mathrm{vec}(C) \\
& \langle X, L_n\rangle = 0, \ n = 2, \dots, N-1,
\end{aligned}
\qquad \text{(Задача максимального потока)}
$$

L_n составляется как вычитание двух матриц. Обе матрицы почти полностью состоят из нулей. Только в первой матрице n-ый столбец состоит из единиц (кроме последней строки). А во второй матрице только n-ая строка состоит из единиц (кроме первого столбца).

При данной настройке, когда всё, что производится источником, пойдёт к стоку, поток сети — это просто сумма всего, что выходит из источника:

$$
\sum_{i=2}^{N} X(1, i) \qquad \text{(Поток)}
$$

$$
S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad
L_2 = \begin{array}{c} \\ 2 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \ & 2 & & & & \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}.
$$

Вывод двойственной задачи к максимальному потоку

$Q = \sum_{i=2}^{N-1} \nu_i L_i$

1) Построим двойств. задачу $L(X, \Lambda_1, \Lambda_2, \nu) =$

$= -\langle S, X\rangle + \langle \Lambda_1, -X\rangle + \langle \Lambda_2, X - C\rangle + \sum_{i=2}^{N-1} \nu_i \langle L_i, X\rangle$

$\sum_{i=2}^{N-1} \nu_i \langle L_i, X\rangle = \langle Q, X\rangle$

$= \langle -S - \Lambda_1 + \Lambda_2 + Q, X\rangle - \langle \Lambda_2, C\rangle$

2) Построим $g(\Lambda_1, \Lambda_2, \nu) = -\langle \Lambda_2, C\rangle$ $\quad -S - \Lambda_1 + \Lambda_2 + Q = 0$

$\Downarrow$

$\Lambda_1 = Q - S + \Lambda_2$

3) Сформулируем двойств задачу:

$$-\langle \Lambda_2, C\rangle \to \max_{\Lambda_1, \Lambda_2, Q}$$

$$-S - \Lambda_1 + \Lambda_2 + Q = 0$$

$$\Lambda_1, \Lambda_2 \geq 0;$$

$$\langle \Lambda, C\rangle \to \min_{\Lambda, Q}$$

$$Q - S + \Lambda \geq 0$$

Вывод двойственной задачи к максимальному потоку

покомп.

$$
\begin{aligned}
\min_{\Lambda, \nu} \ & \langle \Lambda, C \rangle \\
\text{s.t. } & \Lambda + Q \succeq S \\
& \Lambda \succeq 0
\end{aligned}
$$

(∗)

(Двойственная задача максимального потока)

где

$$
Q = \begin{bmatrix}
0 & \nu_2 & \nu_3 & \cdots & \nu_{N-1} & 0 \\
0 & 0 & \nu_3 - \nu_2 & \cdots & \nu_{N-1} - \nu_2 & -\nu_2 \\
0 & \nu_2 - \nu_3 & 0 & \cdots & \nu_{N-1} - \nu_3 & -\nu_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \nu_2 - \nu_{N-1} & \nu_3 - \nu_{N-1} & \cdots & 0 & -\nu_{N-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}.
$$

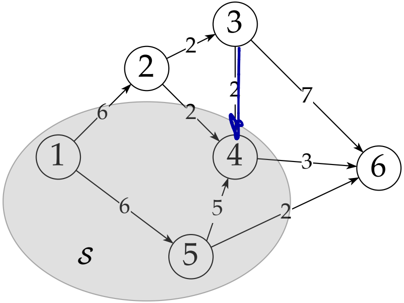
Задача минимального разреза

Разрез сети разделяет вершины на два множества: одно содержит источник (мы называем это множество $\mathcal{S}$), а другое содержит сток. Пропускная способность разреза — это общее значение рёбер, выходящих из $\mathcal{S}$ — мы разделяем множества, "отрезая поток" вдоль этих рёбер.

MINCUT

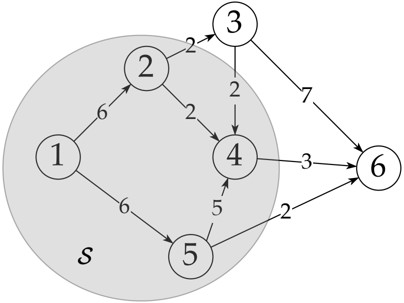
РАЗРЕЗ

$\mathcal{S} = \{1, 4, 5\}$



Рёбра в разрезе: $1 \to 2, 4 \to 6$, и $5 \to 6$, пропускная способность этого разреза равна $6 + 3 + 2 = 11$.

$\mathcal{S} = \{1, 2, 4, 5\}$



Рёбра в разрезе: $2 \to 3, 4 \to 6$, и $5 \to 6$, пропускная способность этого разреза равна $2 + 3 + 2 = 7$.

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Каково минимальное значение наименьшего разреза? Мы докажем, что оно равно оптимальному значению решения d^* двойственной программы (Двойственная задача максимального потока).

$$d^* \leq \text{mincut} \leq d^*$$

$$\underline{\text{mincut} = d^*}$$

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Каково минимальное значение наименьшего разреза? Мы докажем, что оно равно оптимальному значению решения d^* двойственной программы (Двойственная задача максимального потока).

Сначала предположим, что $\mathcal{S}$ — допустимый разрез. Из $\mathcal{S}$ мы можем легко найти двойственную допустимую точку, которая соответствует его пропускной способности: для $n = 1, \dots, N$ возьмём

$$
\nu_n = \begin{cases} 1, & n \in \mathcal{S}, \\ 0, & n \notin \mathcal{S}, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \lambda_{i,j} = \begin{cases} \max(\nu_i - \nu_j, 0), & i \neq 1,\ j \neq N, \\ 1 - \nu_j, & i = 1, \\ \nu_i, & j = N. \end{cases}
$$

точно допустимая точка двойств. к MaxFlow

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Каково минимальное значение наименьшего разреза? Мы докажем, что оно равно оптимальному значению решения d^* двойственной программы (Двойственная задача максимального потока).

Сначала предположим, что $\mathcal{S}$ — допустимый разрез. Из $\mathcal{S}$ мы можем легко найти двойственную допустимую точку, которая соответствует его пропускной способности: для $n = 1, \ldots, N$ возьмём

$$\nu_n = \begin{cases} 1, & n \in \mathcal{S}, \\ 0, & n \notin \mathcal{S}, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \boxed{\lambda_{i,j} = \begin{cases} \max(\nu_i - \nu_j, 0), & i \neq 1, j \neq N, \\ 1 - \nu_j, & i = 1, \\ \nu_i, & j = N. \end{cases}} \in S \ (*)$$

Заметим, что эти выборы подчиняются ограничениям в двойственной задаче, и что $\lambda_{i,j}$ будет равен 1, если $i \to j$ разрезан, и 0 в противном случае, поэтому

$$\boxed{\text{capacity}(S) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} C_{i,j}.} \to \min$$

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Каково минимальное значение наименьшего разреза? Мы докажем, что оно равно оптимальному значению решения d^* двойственной программы (Двойственная задача максимального потока).

Сначала предположим, что $\mathcal{S}$ — допустимый разрез. Из $\mathcal{S}$ мы можем легко найти двойственную допустимую точку, которая соответствует его пропускной способности: для $n = 1, \ldots, N$ возьмём

$$\nu_n = \begin{cases} 1, & n \in \mathcal{S}, \\ 0, & n \notin \mathcal{S}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \lambda_{i,j} = \begin{cases} \max(\nu_i - \nu_j, 0), & i \neq 1,\ j \neq N, \\ 1 - \nu_j, & i = 1, \\ \nu_i, & j = N. \end{cases}$$

Заметим, что эти выборы подчиняются ограничениям в двойственной задаче, и что $\lambda_{i,j}$ будет равен 1, если $i \to j$ разрезан, и 0 в противном случае, поэтому

$$\text{capacity}(S) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} C_{i,j}. \quad = \langle \Lambda, C \rangle$$

Каждый разрез допустим, поэтому

$$\boxed{d^\star \leq \text{MINCUT}.}$$

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Теперь мы покажем, что для каждого решения ν^*, λ^* двойственной задачи существует разрез с пропускной способностью не более d^*. Мы генерируем разрез *случайно*, а затем показываем, что ожидаемое значение пропускной способности разреза меньше d^* — это означает, что должен существовать хотя бы один с пропускной способностью d^* или меньше.

Хотим доказать

$c_{ИТ} \leq d^*$

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Теперь мы покажем, что для каждого решения ν^*, λ^* двойственной задачи существует разрез с пропускной способностью не более d^*. Мы генерируем разрез *случайно*, а затем показываем, что ожидаемое значение пропускной способности разреза меньше d^* — это означает, что должен существовать хотя бы один с пропускной способностью d^* или меньше.

Пусть Z — равномерная случайная величина на $[0, 1]$. Вместе с $\lambda^*, \nu_2^*, \dots, \nu_{N-1}^*$, полученными решением (Двойственная задача максимального потока), возьмём $\nu_1 = 1$ и $\nu_N = 0$. Создадим разрез $\mathcal{S}$ по правилу:

$$\boxed{\text{если } \nu_n^* > Z, \text{ то возьмём } n \in \mathcal{S}.}$$

. . . Вероятность того, что конкретное ребро $i \to j$ находится в этом разрезе, равна

$$
\begin{aligned}
P(i \in \mathcal{S}, j \notin \mathcal{S}) &= \boxed{P\left(\nu_j^\star \le Z \le \nu_i^\star\right)} \\
&\le \begin{cases} \max(\nu_i^\star - \nu_j^\star, 0), & 2 \le i, j \le N-1, \\ 1 - \nu_j^\star, & i = 1;\ j = 2, \dots, N-1, \\ \nu_i^\star, & i = 2, \dots, N-1;\ j = N, \\ 1, & i = 1;\ j = N. \end{cases} \\
&\le \lambda_{i,j}^\star,
\end{aligned}
$$

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Последнее неравенство следует просто из ограничений в двойственной программе (Двойственная задача максимального потока). Этот разрез случайный, поэтому его пропускная способность — случайная величина, и её ожидание равно

$$
\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{E}[\text{capacity}(\mathcal{S})]} &= \sum_{i,j} C_{i,j} \underline{P(i \in \mathcal{S}, j \notin \mathcal{S})} \\
&\leq \sum_{i,j} C_{i,j} \lambda^\star_{i,j} = d^\star.
\end{aligned}
$$

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Последнее неравенство следует просто из ограничений в двойственной программе (Двойственная задача максимального потока). Этот разрез случайный, поэтому его пропускная способность — случайная величина, и её ожидание равно

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{capacity}(\mathcal{S})] &= \sum_{i,j} C_{i,j} P(i \in \mathcal{S}, j \notin \mathcal{S}) \\
&\leq \sum_{i,j} C_{i,j} \lambda^\star_{i,j} = d^\star.
\end{aligned}
$$

Таким образом, должен существовать разрез, пропускная способность которого не более $d^\star$. Это устанавливает, что

$$
\text{MINCUT} \leq d^\star.
$$

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Последнее неравенство следует просто из ограничений в двойственной программе (Двойственная задача максимального потока). Этот разрез случайный, поэтому его пропускная способность — случайная величина, и её ожидание равно

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{capacity}(\mathcal{S})] &= \sum_{i,j} C_{i,j} P(i \in \mathcal{S}, j \notin \mathcal{S}) \\
&\leq \sum_{i,j} C_{i,j} \lambda^\star_{i,j} = d^\star.
\end{aligned}
$$

Таким образом, должен существовать разрез, пропускная способность которого не более $d^\star$. Это устанавливает, что

$$
\text{MINCUT} \leq d^\star.
$$

Объединяя эти два факта, конечно, получаем, что

$$
\boxed{d^\star = \text{MINCUT} = \text{MAXFLOW} = p^\star,}
$$

где $p^\star$ — решение прямой задачи, и равенство следует из сильной двойственности для линейного программирования.

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Последнее неравенство следует просто из ограничений в двойственной программе (Двойственная задача максимального потока). Этот разрез случайный, поэтому его пропускная способность — случайная величина, и её ожидание равно

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{capacity}(\mathcal{S})] &= \sum_{i,j} C_{i,j} P(i \in \mathcal{S}, j \notin \mathcal{S}) \\
&\leq \sum_{i,j} C_{i,j} \lambda^\star_{i,j} = d^\star.
\end{aligned}
$$

Таким образом, должен существовать разрез, пропускная способность которого не более $d^\star$. Это устанавливает, что

$$
\text{MINCUT} \leq d^\star.
$$

Объединяя эти два факта, конечно, получаем, что

$$
d^\star = \text{MINCUT} = \text{MAXFLOW} = p^\star,
$$

где $p^\star$ — решение прямой задачи, и равенство следует из сильной двойственности для линейного программирования.

Теорема максимального потока — минимального разреза.

Максимальное значение s-t потока равно минимальной пропускной способности среди всех s-t разрезов.

Источники

- Теория оптимизации (MATH4230) курс @ CUHK, professor Tieyong Zeng